Avant-propos

L'idée de cet ouvrage s'est peu à peu dégagée à l'occasion de rencontres (colloques, soutenances de thèse, GDR, etc.) entre trois amis universitaires travaillant, à des titres divers, dans le domaine de l'analyse fonctionelle. Cette Analyse dite fonctionnelle interagit avec de nombreux autres domaines des mathématiques, avec un enrichissement mutuel. C'est ce que nous avons tenté de mettre en évidence tout au long de ces dix chapitres d'exercices corrigés et commentés, en ayant le souci de nous maintenir à un niveau moyen qui est celui d'une première année de Master, c'est-à-dire celui du M1, et de rendre l'utilisation de cet ouvrage commode pour un lecteur motivé et ayant un niveau initial équivalent à celui du L3. Illustrons par quelques exemples les interactions mentionnées plus haut :

1. **Convexité :**

   Celle-ci apparaît notamment avec le théorème de Hahn-Banach. Ce dernier débouche sur la construction de moyennes invariantes (« moyennabilité » du groupe des entiers) aussi appelées moyennes de Banach au chapitre III. Ces moyennes à leur tour sont utilisées au chapitre V pour démontrer le théorème de similarité de Nagy. Ce théorème intervient lui-même au chapitre X pour donner une caractérisation complète des opérateurs ayant une « grande » algèbre de Deddens associée. Un autre aspect de la convexité est la notion de point extrémal, présente au chapitre IX (avec le théorème de Krein-Milman sous-jacent) et au chapitre VI avec la caractérisation des points extrémaux de la boule unité des opérateurs sur un Hilbert, qui fait apparaître des phénomènes nouveaux intéressants (co-isométries vraies) en dimension infinie.

2. **Topologie :**

   L'utilisation de la *compacité* apparaît au chapitre VII avec les opérateurs compacts, dont on sait que la théorie spectrale est proche de celle faite en dimension finie (théorie de Riesz) et le théorème d'Ascoli-Arzela y est souvent utilisé, ainsi que la convergence quand il y a une seule valeur d'adhérence (et quand l'espace ambiant est compact), et les théorèmes de Tychonoff, Banach-Alaoglu, pour les topologies affaiblies du chapitre IX. La *connexité* joue aussi un certain rôle dans cet ouvrage, notamment au chapitre V (spectre d'une isométrie) ou au chapitre X (Théorème de Runge, exponentielles dans l'espace des fonctions continues, frontière du spectre, composantes connexes du groupe des éléments inversibles dans une algèbre de Banach, etc.). Enfin, la *complétude* est évidemment centrale tout au long de ces chapitres, avec les théorèmes de Baire (chapitre 2, sommes de fonctions partout sans dérivée), de Banach-Steinhaus, du graphe fermé et de l'application ouverte (Chapitres I, II, IV, VI par exemple).

3. **Intégration et théorie de la mesure :**

   Une classe très intéressante d'opérateurs, les *opérateurs intégraux*, est étudiée au chapitre VIII, où la théorie de l'intégration est centrale, avec les théorèmes de Fubini et de convergence dominée (par exemple, dans l'exercice 10, le fait sous-jacent qu'une suite de fonctions uniformément bornées qui converge simplement vers zéro converge faiblement au sens des espaces de Banach). Cette théorie de la mesure permet également de donner, au chapitre X, des exemples intéressants d'algèbres de Banach dont le groupe des éléments inversibles contient « beaucoup » de non-exponentielles, et qui sont liées à l'analyse harmonique et et aux séries de Fourier. Elle intervient aussi au chapitre V pour donner l'exemple de l'espace de Bergman dont la structure est riche et instructive (noyau reproduisant, opérateurs de Toeplitz, inversibles sans racine carrée, etc.).

4. **Fonctions holomorphes :**

   On a déjà mentionné le cas de l'espace de Bergman au chapitre V. Mais ces fonctions sont aussi présentes au chapitre I, par exemple, et encore plus aux chapitres VI et X, où leur utilité dans l'étude des algèbres de Banach est illustrée dans de nombreux exercices, en collaboration avec le théorème de Hahn-Banach : formule de Cauchy vectorielle, séries de Laurent et formule du rayon spectral, théorèmes de Runge et Liouville, etc.

5. **Propriétés isométriques :**

   Une propriété frappante de ces isométries est dégagée au chapitre I : *la structure métrique d'un espace vectoriel normé détermine sa structure linéaire* (Ex.I.9). Dans le cas hilbertien, on peut dire beaucoup plus, et le groupe des isométries surjectives (groupe unitaire) est très riche : en dimension finie, cette richesse est déjà connue, et ses applications, on en explore d'autres aspects en dimension infinie. Quand la dimension est infinie apparaissent des phénomènes nouveaux, comme l'existence d'isométries non surjectives avec le fameux shift unilatéral S, omni-présent dans cet ouvrage. L'étude générale des isométries (et des isométries partielles) s'appuie fortement sur la décomposition polaire et ses variantes (notamment la décomposition polaire maximale), qui est étudiée en détail dans les exercices du chapitre VI, et rend à peu près autant de services que la décomposition polaire $z = e^{i\theta}\rho$ des nombres complexes ! C'est ce que nous avons cherché à montrer, en particulier dans la caractérisation complète des points extrémaux de la boule unité des opérateurs sur un Hilbert. D'autres propriétés des isométries partielles, certaines peu connues, sont également proposées au chapitre VI.

Comme on le voit, les interactions sont également fortes entre les différents chapitres, qui s'éclairent mutuellement, nous nous sommes parfois permis d'invoquer au chapitre x un exercice du chapitre y, avec $y > x$. Et nous ne saurions trop recommander au lecteur d'avoir une lecture et une utilisation *globales* de cet ouvrage, au lieu d'en faire un usage ponctuel sur un exercice spécifique.

Un mot sur le contenu pour compléter ce qui a déjà été dit : cet ouvrage contient des résultats classiques, mais sur lesquels il est utile à l'étudiant de s'entraîner, comme certains exercices du chapitre I. Il contient des résultats plus récents ou des preuves moins classiques que nous ne saurions citer tous, comme l'équation de Daugavet au chapitre VIII, la preuve par série de Neumann du lemme de Wiener ou les caractérisations de l'algèbre de Deddens au chapitre X, et les propriétés fines des contractions au chapitre VI.

Précisons un point important : on donne d'abord tous les énoncés d'un chapitre, ensuite tous les corrigés des exercices de ce chapitre, pour favoriser la démarche :
« Lecture de l'énoncé. Recherche patiente d'une solution. Lecture de la solution tout à fait à la fin ».

Ces corrigés sont complets et raisonnablement détaillés à notre avis, mais nous n'avons pas cherché à surdétailler, ce qui conduirait inévitablement à un certain alourdissement et à une certaine obscurité, et nous ne saurions trop répéter que ce livre n'est pas fait pour être lu à la plage ou dans un hamac !

D'autre part, puisqu'il n'y a pas à proprement parler de « cours » dans ce livre, le traditionnel index a pris la forme d'une trentaine de pages (situées au début de l'ouvrage), qui décrivent chapitre par chapitre les notations utilisées et les résultats fondamentaux de cours (dont certains, peu nombreux, sont redémontrés en exercice). Dans les corrigés, on fait fort souvent référence à ces trente pages, ce qui devrait rendre l'utilisation du livre très commode au lecteur.

Répétons-nous encore une fois : une bibliographie spécifique vient compléter le livre. Cette bibliographie comporte quelques ouvrages classiques (comme les livres de Rudin), parfois disponibles seulement en langue étrangère, mais que leur excellence rend hautement recommandables (nous pensons notamment aux livres de P. Halmos et de D. Werner). Elle comporte également des articles, dont le choix reflète les goûts complémentaires des trois auteurs.

Organisation générale de l'ouvrage

(1) Résumé du cours, ne remplaçant pas un manuel de cours mais servant de référence.

Les numéros des définitions et propriétés : l'indication dans une solution de (D 4.7), par exemple, est celle de la définition utile, chapitre 4, numéro 7.

(2) Dix chapitres d'exercices (numérotés de I à X) se reportant chacun au chapitre du cours de même numéro.

Dans chaque chapitre, le lecteur trouvera trois sortes d'exercices :

Exercices brefs destinés à contrôler la compréhension initiale du chapitre.

Exercices plus longs faisant appel à plus de réflexion.

Exercices d'ouverture vers une meilleure connaissance des notions d'analyse fonctionnelle et vers quelques résultats importants, parfois assez récents.

Quelques précisions sur l'ordre

Dans chaque chapitre d'exercices, les textes sont groupés au début.
Les relations munies d'un numéro : les numéros sont dans l'ordre de **première apparition** de la relation dans le chapitre (par exemple (II.1) désigne la première relation du chapitre II) - cette relation est répétée au besoin à l'intérieur de l'exercice (énoncé ou solution) pour une meilleure compréhension du lecteur.

Connaissances préalables

(1) La structure générale d'un espace métrique (voire topologique), les notions de suite convergente ou de Cauchy, celles de sous-espace muni de la structure de l'espace.
(2) Le langage usuel des opérateurs linéaires entre espaces vectoriels, en particulier espaces de dimension finie (noyau, image, valeurs propres, espaces propres, opérateurs auto-adjoints…) éventuellement la forme de Jordan, admise ici, mais utilisée dans l'exercice V.12.

Ordre des chapitres

Pour les exercices sur les opérateurs, nous avons choisi de parler d'abord des opérateurs linéaires entre espaces normés (ch. IV) et d'aborder ensuite le cas particulier des opérateurs entre espaces de Hilbert (ch. VI).
Le cas plus général d'éléments dans une algèbre de Banach ou une C*-algèbre est abordé au dernier chapitre (ch. X). Cependant les résultats qui y apparaissent sont souvent, dans un cours assez bref d'analyse fonctionnelle, prouvés dans le cadre des opérateurs entre espaces de Banach sans attirer l'attention sur leur généralité. Ils peuvent alors apparaître deux fois pour le lecteur attentif (par exemple (P 6.6) et (P 10.10)).

Le lecteur ?

Celui qui se contente de « lire » l'ouvrage n'aura rien appris.
Un ouvrage d'exercices est fait pour vérifier les connaissances acquises et pour susciter la réflexion, la recherche personnelle, pour mettre le lecteur dans l'état d'esprit de celui qui, ayant acquis un certain bagage, cherche par lui-même à en savoir plus.
Bien sûr, un texte d'exercice posé de manière précise et directive peut enlever le mystère qu'il y aurait à se poser personnellement une question dont on ignore la réponse.
Nous avons cependant cherché à organiser les textes pour que le « lecteur » puisse par l'abord préalable de quelques cas particuliers (l'usage des opérateurs en dimension finie est parfois fondamental) voir pourquoi la réponse peut calquer celle de la dimension finie ou au contraire être différente.
Il est évident qu'une recherche d'exercice doit être faite sans avoir pris du tout connaissance de la solution. On doit faire un plan de résolution d'une question et non partir au hasard. L'usage du corrigé ne doit être fait qu'après une recherche personnelle non négligeable, en dernière instance, en quelque sorte.

Avant-propos

L'idée de cet ouvrage s'est peu à peu dégagée à l'occasion de rencontres (colloques, soutenances de thèse, GDR, etc.) entre trois amis universitaires travaillant, à des titres divers, dans le domaine de l'analyse fonctionelle. Cette Analyse dite fonctionnelle interagit avec de nombreux autres domaines des mathématiques, avec un enrichissement mutuel. C'est ce que nous avons tenté de mettre en évidence tout au long de ces dix chapitres d'exercices corrigés et commentés, en ayant le souci de nous maintenir à un niveau moyen qui est celui d'une première année de Master, c'est-à-dire celui du M1, et de rendre l'utilisation de cet ouvrage commode pour un lecteur motivé et ayant un niveau initial équivalent à celui du L3. Illustrons par quelques exemples les interactions mentionnées plus haut :

1. **Convexité :**

   Celle-ci apparaît notamment avec le théorème de Hahn-Banach. Ce dernier débouche sur la construction de moyennes invariantes (« moyennabilité » du groupe des entiers) aussi appelées moyennes de Banach au chapitre III. Ces moyennes à leur tour sont utilisées au chapitre V pour démontrer le théorème de similarité de Nagy. Ce théorème intervient lui-même au chapitre X pour donner une caractérisation complète des opérateurs ayant une « grande » algèbre de Deddens associée. Un autre aspect de la convexité est la notion de point extrémal, présente au chapitre IX (avec le théorème de Krein-Milman sous-jacent) et au chapitre VI avec la caractérisation des points extrémaux de la boule unité des opérateurs sur un Hilbert, qui fait apparaître des phénomènes nouveaux intéressants (co-isométries vraies) en dimension infinie.

2. **Topologie :**

   L'utilisation de la *compacité* apparaît au chapitre VII avec les opérateurs compacts, dont on sait que la théorie spectrale est proche de celle faite en dimension finie (théorie de Riesz) et le théorème d'Ascoli-Arzela y est souvent utilisé, ainsi que la convergence quand il y a une seule valeur d'adhérence (et quand l'espace ambiant est compact), et les théorèmes de Tychonoff, Banach-Alaoglu, pour les topologies affaiblies du chapitre IX. La *connexité* joue aussi un certain rôle dans cet ouvrage, notamment au chapitre V (spectre d'une isométrie) ou au chapitre X (Théorème de Runge, exponentielles dans l'espace des fonctions continues, frontière du spectre, composantes connexes du groupe des éléments inversibles dans une algèbre de Banach, etc.). Enfin, la *complétude* est évidemment centrale tout au long de ces chapitres, avec les théorèmes de Baire (chapitre 2, sommes de fonctions partout sans dérivée), de Banach-Steinhaus, du graphe fermé et de l'application ouverte (Chapitres I, II, IV, VI par exemple).

3. **Intégration et théorie de la mesure :**

   Une classe très intéressante d'opérateurs, les *opérateurs intégraux*, est étudiée au chapitre VIII, où la théorie de l'intégration est centrale, avec les théorèmes de Fubini et de convergence dominée (par exemple, dans l'exercice 10, le fait sous-jacent qu'une suite de fonctions uniformément bornées qui converge simplement vers zéro converge faiblement au sens des espaces de Banach). Cette théorie de la mesure permet également de donner, au chapitre X, des exemples intéressants d'algèbres de Banach dont le groupe des éléments inversibles contient « beaucoup » de non-exponentielles, et qui sont liées à l'analyse harmonique et et aux séries de Fourier. Elle intervient aussi au chapitre V pour donner l'exemple de l'espace de Bergman dont la structure est riche et instructive (noyau reproduisant, opérateurs de Toeplitz, inversibles sans racine carrée, etc.).

4. **Fonctions holomorphes :**

   On a déjà mentionné le cas de l'espace de Bergman au chapitre V. Mais ces fonctions sont aussi présentes au chapitre I, par exemple, et encore plus aux chapitres VI et X, où leur utilité dans l'étude des algèbres de Banach est illustrée dans de nombreux exercices, en collaboration avec le théorème de Hahn-Banach : formule de Cauchy vectorielle, séries de Laurent et formule du rayon spectral, théorèmes de Runge et Liouville, etc.

5. **Propriétés isométriques :**

   Une propriété frappante de ces isométries est dégagée au chapitre I : *la structure métrique d'un espace vectoriel normé détermine sa structure linéaire* (Ex.I.9). Dans le cas hilbertien, on peut dire beaucoup plus, et le groupe des isométries surjectives (groupe unitaire) est très riche : en dimension finie, cette richesse est déjà connue, et ses applications, on en explore d'autres aspects en dimension infinie. Quand la dimension est infinie apparaissent des phénomènes nouveaux, comme l'existence d'isométries non surjectives avec le fameux shift unilatéral S, omni-présent dans cet ouvrage. L'étude générale des isométries (et des isométries partielles) s'appuie fortement sur la décomposition polaire et ses variantes (notamment la décomposition polaire maximale), qui est étudiée en détail dans les exercices du chapitre VI, et rend à peu près autant de services que la décomposition polaire $z = e^{i\theta}\rho$ des nombres complexes ! C'est ce que nous avons cherché à montrer, en particulier dans la caractérisation complète des points extrémaux de la boule unité des opérateurs sur un Hilbert. D'autres propriétés des isométries partielles, certaines peu connues, sont également proposées au chapitre VI.

Comme on le voit, les interactions sont également fortes entre les différents chapitres, qui s'éclairent mutuellement, nous nous sommes parfois permis d'invoquer au chapitre x un exercice du chapitre y, avec $y > x$. Et nous ne saurions trop recommander au lecteur d'avoir une lecture et une utilisation *globales* de cet ouvrage, au lieu d'en faire un usage ponctuel sur un exercice spécifique.

Un mot sur le contenu pour compléter ce qui a déjà été dit : cet ouvrage contient des résultats classiques, mais sur lesquels il est utile à l'étudiant de s'entraîner, comme certains exercices du chapitre I. Il contient des résultats plus récents ou des preuves moins classiques que nous ne saurions citer tous, comme l'équation de Daugavet au chapitre VIII, la preuve par série de Neumann du lemme de Wiener ou les caractérisations de l'algèbre de Deddens au chapitre X, et les propriétés fines des contractions au chapitre VI.

Précisons un point important : on donne d'abord tous les énoncés d'un chapitre, ensuite tous les corrigés des exercices de ce chapitre, pour favoriser la démarche :
« Lecture de l'énoncé. Recherche patiente d'une solution. Lecture de la solution tout à fait à la fin ».

Ces corrigés sont complets et raisonnablement détaillés à notre avis, mais nous n'avons pas cherché à surdétailler, ce qui conduirait inévitablement à un certain alourdissement et à une certaine obscurité, et nous ne saurions trop répéter que ce livre n'est pas fait pour être lu à la plage ou dans un hamac !

D'autre part, puisqu'il n'y a pas à proprement parler de « cours » dans ce livre, le traditionnel index a pris la forme d'une trentaine de pages (situées au début de l'ouvrage), qui décrivent chapitre par chapitre les notations utilisées et les résultats fondamentaux de cours (dont certains, peu nombreux, sont redémontrés en exercice). Dans les corrigés, on fait fort souvent référence à ces trente pages, ce qui devrait rendre l'utilisation du livre très commode au lecteur.

Répétons-nous encore une fois : une bibliographie spécifique vient compléter le livre. Cette bibliographie comporte quelques ouvrages classiques (comme les livres de Rudin), parfois disponibles seulement en langue étrangère, mais que leur excellence rend hautement recommandables (nous pensons notamment aux livres de P. Halmos et de D. Werner). Elle comporte également des articles, dont le choix reflète les goûts complémentaires des trois auteurs.

Organisation générale de l'ouvrage

(1) Résumé du cours, ne remplaçant pas un manuel de cours mais servant de référence.

Les numéros des définitions et propriétés : l'indication dans une solution de (D 4.7), par exemple, est celle de la définition utile, chapitre 4, numéro 7.

(2) Dix chapitres d'exercices (numérotés de I à X) se reportant chacun au chapitre du cours de même numéro.

Dans chaque chapitre, le lecteur trouvera trois sortes d'exercices :

Exercices brefs destinés à contrôler la compréhension initiale du chapitre.

Exercices plus longs faisant appel à plus de réflexion.

Exercices d'ouverture vers une meilleure connaissance des notions d'analyse fonctionnelle et vers quelques résultats importants, parfois assez récents.

Quelques précisions sur l'ordre

Dans chaque chapitre d'exercices, les textes sont groupés au début.
Les relations munies d'un numéro : les numéros sont dans l'ordre de **première apparition** de la relation dans le chapitre (par exemple (II.1) désigne la première relation du chapitre II) - cette relation est répétée au besoin à l'intérieur de l'exercice (énoncé ou solution) pour une meilleure compréhension du lecteur.

Connaissances préalables

(1) La structure générale d'un espace métrique (voire topologique), les notions de suite convergente ou de Cauchy, celles de sous-espace muni de la structure de l'espace.
(2) Le langage usuel des opérateurs linéaires entre espaces vectoriels, en particulier espaces de dimension finie (noyau, image, valeurs propres, espaces propres, opérateurs auto-adjoints...) éventuellement la forme de Jordan, admise ici, mais utilisée dans l'exercice V.12.

Ordre des chapitres

Pour les exercices sur les opérateurs, nous avons choisi de parler d'abord des opérateurs linéaires entre espaces normés (ch. IV) et d'aborder ensuite le cas particulier des opérateurs entre espaces de Hilbert (ch. VI).
Le cas plus général d'éléments dans une algèbre de Banach ou une C*-algèbre est abordé au dernier chapitre (ch. X). Cependant les résultats qui y apparaissent sont souvent, dans un cours assez bref d'analyse fonctionnelle, prouvés dans le cadre des opérateurs entre espaces de Banach sans attirer l'attention sur leur généralité. Ils peuvent alors apparaître deux fois pour le lecteur attentif (par exemple (P 6.6) et (P 10.10)).

Le lecteur ?

Celui qui se contente de « lire » l'ouvrage n'aura rien appris.
Un ouvrage d'exercices est fait pour vérifier les connaissances acquises et pour susciter la réflexion, la recherche personnelle, pour mettre le lecteur dans l'état d'esprit de celui qui, ayant acquis un certain bagage, cherche par lui-même à en savoir plus.
Bien sûr, un texte d'exercice posé de manière précise et directive peut enlever le mystère qu'il y aurait à se poser personnellement une question dont on ignore la réponse.
Nous avons cependant cherché à organiser les textes pour que le « lecteur » puisse par l'abord préalable de quelques cas particuliers (l'usage des opérateurs en dimension finie est parfois fondamental) voir pourquoi la réponse peut calquer celle de la dimension finie ou au contraire être différente.
Il est évident qu'une recherche d'exercice doit être faite sans avoir pris du tout connaissance de la solution. On doit faire un plan de résolution d'une question et non partir au hasard. L'usage du corrigé ne doit être fait qu'après une recherche personnelle non négligeable, en dernière instance, en quelque sorte.

Toute solution proposée est faite pour réfléchir aux méthodes employées. En ce sens il peut y en avoir plusieurs, ou des exercices semblables associés à différents chapitres. Ceci peut mettre en évidence les possibilités de solutions utilisant peu d'informations sur le cours, et montrer ensuite l'amélioration éventuelle apportée par l'usage des grands théorèmes. L'exemple des deux solutions de l'exercice V.4 nous paraît significatif à cet égard.

Dans le cas d'une solution de question nécessitant plusieurs étapes, non explicitées dans le texte, des sous-paragraphes pourront apparaître dans cette solution ; l'attention du lecteur sera alors attirée, leurs intitulés seront en général soulignés, et la difficulté sera autant que possible « fractionnée ». Enfin, une bibliographie courte, mais très ciblée, vient compléter cet ouvrage, dont nous espérons qu'il pourra rendre des services aux étudiants de L3 et M1-M2, ainsi qu'aux agrégatifs et à ceux démarrant une thèse en analyse fonctionnelle.

Nous espérons que ce nouvel ouvrage pourra rendre des services aux étudiants et collègues qui l'utiliseront, et nous acueillerons avec plaisir et intérêt toutes les remarques des lecteurs aux adresses suivantes :

josette.charles@infonie.fr
mbekhta@math.univ-lille1.fr
queff@math.univ-lille1.fr