TD

JEAN-PIERRE LECOUTRE
NAÏLA HAHEK
PHILIPPE PILIBOSSIAN

ALGÈBRE

- QCM et exercices corrigés
- 9 sujets d'examen corrigés
- Rappels de cours

5e ÉDITION

DUNOD

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-075932-3

TD Sommaire

Avant-propos

Pour vous familiariser avec l'usage de l'outil mathématique, indispensable à toute formalisation en économie, nous proposons une série d'exercices, regroupés en deux volumes : *Analyse* et *Algèbre*. Cet ouvrage, s'adresse aux étudiants de Licence d'économie et gestion ou d'AES.

Chacun des dix premiers chapitres (les 9 et 10 étant des compléments d'analyse) présente la même structure. Au début, les principales notions de cours et les résultats importants sont rappelés de façon succinte dans « L'essentiel du cours ». Un bref texte introductif indique les points essentiels qui vont être abordés et présentés dans le chapitre. Il ne s'agit pas d'un résumé de cours, mais seulement d'un avant-propos où on essaie d'expliquer, dans un langage peu formalisé, le fondement et l'utilité des notions définies ensuite de façon plus formelle.

Un certain nombre d'affirmations constituent le paragraphe « Q.C.M ». La réponse en vrai-faux permet à l'étudiant de vérifier s'il a bien compris les principaux points de cours. Il doit exercer sa vigilance face à des affirmations, parfois simples, mais qui peuvent contenir un piège.

Les questions de « Réflexion » qui sont proposées ensuite ont essentiellement pour but de mettre l'accent sur certaines notions un peu délicates du cours. Il faut être attentif aux commentaires qui figurent dans la solution de l'exercice, en fin de chapitre.

Les exercices d'« Entraînement » permettent, enfin, à l'étudiant de tester sa capacité à passer de la théorie à la pratique. Ils suivent l'ordre de progression du cours et sont précédés d'un titre indiquant la principale notion à laquelle ils se rapportent. Une rubrique « Analyse de l'énoncé et conseils » précise la démarche à suivre et les résultats de cours à utiliser pour résoudre l'exercice proposé.

Les solutions très détaillées sont regroupées en fin de chapitre, très souvent assorties de commentaires. Certaines solutions se concluent par un énoncé d'exercice identique (« Vous avez compris ? ») et seule réponse figure aussitôt après.

Dans le dernier chapitre, les textes récents des examens de 2e année de Licence d'économie et gestion de l'université Paris II Panthéon-Assas permettent de retrouver les principaux points abordés dans les chapitres précédents. L'étudiant peut ainsi évaluer le niveau de difficulté de ce qui peut être demandé à une épreuve d'examen. Les corrigés sont regroupés après les énoncés.

TD 1 Théorie des ensembles

COURS

L'ESSENTIEL

On trouvera dans ce chapitre la définition et les principales propriétés d'une *fonction*, ou *application*, définie comme une relation binaire particulière entre deux ensembles. On définira donc au préalable la notion de relation binaire et on présentera ensuite quelques relations particulières, comme les relations d'*équivalence*, de préordre et d'ordre. Comme relations fonctionnelles particulières, nous étudierons les *injections*, les *surjections* et les *bijections*. Nous verrons également dans quelles conditions on peut effectuer la *composition* d'applications ou définir une *application réciproque*.

1 Ensembles

1.1 Définitions

- On appelle *différence* de deux parties A et B d'un ensemble E l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B ; cet ensemble est noté $A - B$.
- On appelle *différence symétrique* de deux parties A et B d'un ensemble E l'ensemble des éléments de E qui appartiennent soit à A soit à B, sans appartenir simultanément à A et à B ; cet ensemble est noté $A\Delta B$. Il peut s'écrire :

$$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

- On appelle *partition* d'un ensemble E toute famille de parties de E non vides, deux à deux disjointes et dont la réunion forme l'ensemble E.
- On appelle *produit cartésien* (ou ensemble produit) de deux ensembles E et F, l'ensemble des couples (x,y) où $x \in E$ et $y \in F$; cet ensemble est noté $E \times F$.

2 Relations

2.1 Relation binaire

Soit G une partie du produit cartésien $E \times F$ et (x, y) un couple de $E \times F$. On dit que x est en relation $\mathcal{R}$ avec y si $(x, y) \in G$. Cette *relation binaire* entre les éléments x et y est notée $x\mathcal{R}y$. L'ensemble G est appelé le *graphe*, E l'ensemble de *départ* et F l'ensemble d'*arrivée* de cette relation.

Dans le cas particulier où $E = F$, on dit que $\mathcal{R}$ est une relation binaire dans E. Elle peut alors posséder certaines des propriétés suivantes.

Elle est *réflexive* si pour tout x dans E on a $x\mathcal{R}x$.

Elle est *symétrique* si pour tous x et y dans E : $x\mathcal{R}y \Longrightarrow yRx$.

Elle est *antisymétrique* si pour tous x et y dans E : $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Longrightarrow x = y$.

Elle est *transitive* si pour tous x, y et z dans E : $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Longrightarrow xRz$.

2.2 Définitions

- On appelle *relation d'équivalence* une relation binaire dans E qui est à la fois réflexive, symétrique et transitive. Pour tout élément a de E, on appelle *classe d'équivalence* de a, modulo $\mathcal{R}$, le sous-ensemble de E défini par :

  $$Cl\,(a) = \{x \in E \mid x\mathcal{R}a\}$$

  On appelle *ensemble quotient* de E par $\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$, noté $E / \mathcal{R}$.

- On appelle *relation de préordre* une relation binaire dans E qui est à la fois réflexive et transitive.

- On appelle *relation d'ordre* une relation binaire dans E qui est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive. Elle est dite d'*ordre total* si deux éléments quelconques x et y de E sont comparables par cette relation, c'est-à-dire si on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$. Dans le cas contraire, l'ordre est dit *partiel*.

3 Applications

3.1 Définitions

- Soit $\mathcal{R}$une relation binaire d'un ensemble E vers un ensemble F. Cette relation est dite *fonctionnelle* en y si, pour tout élément x dans E, il existe un élément et un seul dans F tel que $x\mathcal{R}y$ soit vraie. Le graphe d'une telle relation est appelé le *graphe fonctionnel* dans $E \times F$.

- On appelle *fonction* (ou *application*) la relation qui associe à tout élément x de E l'élément unique y de F avec lequel il est en relation fonctionnelle. Une fonction est déterminée par le triplet (E, F, G) constitué respectivement de ses ensembles de départ et d'arrivée et de son graphe fonctionnel. On dit que la fonction f est définie dans E et à valeurs dans F, ou que f est une application de E dans F. On utilise les notations suivantes :

$$f : E \longrightarrow F \quad \text{ou} \quad f : x \longmapsto f(x)$$

- On appelle *image* d'un sous-ensemble A de E par f le sous-ensemble de F défini par :

$$f(A) = \{y \in F \mid \text{il existe } x \in \text{A tel que } y = f(x)\}$$

- On appelle *image réciproque* d'un sous-ensemble B de F par f le sous-ensemble de E défini par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

- Une application f de E dans F est *injective*, ou est une *injection*, si deux éléments distincts x_1 et x_2 de E ont toujours des images distinctes dans F :

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

  Ou, de façon équivalente, si chaque élément de F est l'image d'au plus un élément de E :

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

- Une application f de E dans F est *surjective*, ou est une *surjection*, si tout élément y de F est l'image d'au moins un élément x de E, c'est-à-dire qu'il existe au moins un x tel que $y = f(x)$. Cette propriété se traduit également par $f(E) = F$.

- Une application f qui est à la fois injective et surjective est *bijective*, ou est une *bijection*. Pour tout élément y de F il existe alors un et un seul élément x de E tel que $y = f(x)$.

- Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et g une application de F dans un ensemble G. L'application *composée* de f et g, notée $g \circ f$, est l'application de E dans G qui à tout élément x de E fait correspondre l'élément $g[f(x)]$ de G.

- Si f est une bijection d'un ensemble E dans un ensemble F, la relation fonctionnelle en y est aussi une relation fonctionnelle en x. Cette dernière définit alors une bijection de F dans E, appelée application *réciproque*, ou *inverse*, de f, notée $f^{-1} : y \in F, x = f^{-1}(y) \Longleftrightarrow y = f(x), x \in E$

COURS

Q.C.M

	Vrai	Faux
1. L'ensemble $A \cap B$ est le plus grand ensemble contenu à la fois dans les ensembles A et B.	○	○
2. Si A et B sont deux ensembles d'une même famille $\mathcal{E}$, alors $A \cup B$ appartient aussi à la famille $\mathcal{E}$.	○	○
3. La relation d'inclusion au sens large entre parties d'un même ensemble est une relation d'ordre.	○	○
4. Si A et B sont deux parties d'un même ensemble E, les relations $A \subset B$ et $B^c \subset A^c$ sont équivalentes, A^c étant le complémentaire de A dans E.	○	○
5. Deux classes d'équivalence qui ont un élément commun sont confondues.	○	○
6. Si f est une application d'un ensemble fini dans lui-même, les propriétés suivantes sont équivalentes : f est injective $\Longleftrightarrow f$ est surjective $\Longleftrightarrow f$ est bijective	○	○
7. L'application inverse de $x \longmapsto x$ est l'application $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.	○	○
8. L'application réciproque de la bijection $g \circ f$ est l'application $g^{-1} \circ f^{-1}$.	○	○

RÉFLEXION

9. Montrer qu'il n'y a pas associativité entre les lois de réunion et d'intersection en comparant les ensembles :

$$X = (A \cap B) \cup C \quad \text{et} \quad Y = A \cap (B \cup C)$$

10. Montrer que la différence entre ensembles n'est pas associative, en comparant les ensembles :

$$X = (A - B) - C \text{ et } Y = A - (B - C).$$

11. Déterminer les ensembles : $F = \bigcup_{A \in \mathcal{P}(E)} A$ et $G = \bigcap_{A \in \mathcal{P}(E)} A$

où E est un ensemble quelconque.

12. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et A et B deux sous-ensembles quelconques de E. Montrer que :

$A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ si f est injective, alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

13. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et A et B deux sous-ensembles quelconques de F. Montrer que :

$A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B) \qquad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \qquad f^{-1}(A^c) = [f^{-1}(A)]^c$

14. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et A et B deux sous-ensembles quelconques respectivement de E et de F. Montrer que :

$A \subset f^{-1}[f(A)]$ si f est injective, alors $A \supset f^{-1}[f(A)]$

$B \supset f[f^{-1}(B)]$ si f est surjective, alors $B \subset f[f^{-1}(B)]$

ENTRAÎNEMENT

Opérations sur les ensembles

15. Soit A, B et C des parties d'un ensemble E. Déterminer les ensembles suivants :

$X = (A \cap B) \cup (A^c \cap B) \qquad Z = (A^c \cap B^c) \cap (A \cap B)^c$

$Y = (A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup B) \qquad U = [A \cap (B \cap C)] \cap [(B \cap C) \, U \, C^c]$

$V = (A \cap B) \cup (A^c \cap C) \cup [(A^c \cup B) \cup (A \cap C)]^c$

$W = (A \cup C) \cap [(A \cup B \cup C)^c \cup (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c)] \cap [C \cup (B \cap C)]$

Analyse de l'énoncé et conseils. On utilise la distributivité des opérations de réunion et d'intersection ainsi que les lois de Morgan pour simplifier l'écriture des ensembles proposés.

16. Si A est l'ensemble des entiers multiples de 5 et B l'ensemble des entiers pairs, déterminer la différence $A - B$ de ces deux ensembles.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il suffit d'appliquer la définition de la différence de deux ensembles.

17. Si A, B et C sont trois parties non disjointes deux à deux d'un ensemble E, on demande de construire la partition de cet ensemble en *atomes*, c'est-à-dire en sous-ensembles qui ne peuvent plus être décomposés à leur tour.

Analyse de l'énoncé et conseils. Dans le cas de deux sous-ensembles A et B seulement, on peut voir aisément sur une représentation graphique d'Euler que les atomes qui constituent la partition de E sont les sous-ensembles $A \cap B$, $A - B = A \cap B^c$, $B - A = B \cap A^c$ et $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. Avec trois sous-ensembles, les atomes seront obtenus par les intersections des différents sous-ensembles ou de leur complémentaire.

18. Si A, B et C sont des parties d'un ensemble E, exprimer $A\Delta B\Delta C$ en fonction des atomes définis dans l'exercice précédent.

Analyse de l'énoncé et conseils. On utilisera d'abord la définition de la différence symétrique $A\Delta B$ à l'aide de $A \cup B$ et $A \cap B$ pour exprimer son complémentaire $(A\Delta B)^c$. On écrit ensuite l'ensemble demandé sous la forme de la différence symétrique $(A\Delta B)\Delta C$.

19. Si A et B sont des parties quelconques d'un ensemble E, démontrer les équivalences suivantes :

$$A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A \Longleftrightarrow A \cup B = B \Longleftrightarrow B^c \subset A^c$$

Analyse de l'énoncé et conseils. L'égalité de deux ensembles s'obtient par une double inclusion de ces ensembles.

20. Soit A, B et C trois ensembles tels que :

$$A \cap B \subset A \cap C \quad \text{et} \quad A \cup B \subset A \cup C$$

Déterminer la relation qui existe entre les ensembles B et C.

Analyse de l'énoncé et conseils. La double inclusion rend plausible l'hypothèse à démontrer $B \subset C$.

Famille d'ensembles

21. Si I est un ensemble fini d'indices, $\{A_i\}_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble quelconque E et B un sous-ensemble de E, démontrer les propriétés suivantes :

$$\bigcup_{i\in I} A_i^c = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c \qquad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B)$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i^c = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c \qquad \bigcap_{i\in I} A_i \subset A_i \subset \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$$

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B)$$

Si $\{B_i\}_{i\in I}$ est une famille de parties de E telle que pour tout indice i de I on ait : $A_i \cup B_i = E$, démontrer que :

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = E$$

Analyse de l'énoncé et conseils. Les quatre premières propriétés se démontrent par récurrence en considérant par exemple que $I = \{1, 2, ..., n\}$ et en supposant la propriété vraie pour $J = \{1, 2, ..., n-1\}$. La cinquième est évidente et la dernière s'établit en prouvant que E est inclus dans l'une des deux unions où les ensembles A_i et B_i jouent un rôle symétrique.

Partition

22. On considère les sous-ensembles suivants de $X = \{a, b, c, d, e, f\}$:

$$A = \{a, b\}, B = \{a, b, c\}, C = \{a, b, c, d\}, D = \{f\}, E = \{b, e\},$$
$$F = \{e, f\}, G = \{b\}$$

Déterminer toutes les familles constituées à partir de ces sous-ensembles et qui forment une partition de X.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il suffit de savoir ce qu'est une partition pour repérer aisément les familles qui constituent des partitions de X.

23. Préciser si la famille $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ constitue une partition de E dans chacun des cas ci-après.

a) $A_n = \{n, n+2\}$ et $E = \mathbb{N}$.

b) $A_n = \{n, n+1\}$ et $E = \mathbb{N}$.

c) $A_n = \{2n, 2n+1\}$ et $E = \mathbb{N}$.

d) $A_n = [n, n+1[$ et $E = [0,+\infty[$.

e) $A_n = [n+1, n+2[$ et $E =]0,+\infty[$.

f) $A_n =]-n, n[$ et $E = \mathbb{R}$.

EXERCICES

Analyse de l'énoncé et conseils. Là encore, à partir de la définition d'une partition il est facile de répondre à la question.

Cardinal

24. Si A et B sont deux ensembles finis, exprimer le cardinal de leur différence symétrique $A\Delta B$.

Analyse de l'énoncé et conseils. Le résultat s'obtient aisément en écrivant cette différence symétrique sous la forme d'une différence de deux ensembles.

25. Soit A_1, A_2 et A_3 trois ensembles finis et notons $n_i = \text{card } A_i$, $n_{ij} = \text{card } (A_i \cap A_j)$ pour i et j différents variant de 1 à 3, $n_{123} = \text{card } (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Dans le cas où $n_1 = 10$, $n_2 = 15$, $n_3 = 20$, $n_{12} = 8$ et $n_{23} = 9$ indiquer les valeurs possibles de card $(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$.

Analyse de l'énoncé et conseils. On exprime card $(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ en fonction des autres cardinaux et on utilise les contraintes vérifiées par les cardinaux inconnus pour obtenir un encadrement de sa valeur.

Produit cartésien

26. On lance un dé à six faces qui comportent deux fois chacun des chiffres 1, 2 et 3. On lance le dé une seconde fois si le résultat du premier jet est impair. Montrer que l'ensemble des résultats de deux lancers est un produit cartésien que l'on déterminera. Montrer ensuite que si on se restreint aux lancers pour lesquels la somme des deux résultats obtenus est paire, l'ensemble est un carré cartésien.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il suffit de considérer l'ensemble des résultats possibles pour chaque lancer et de tenir compte de la restriction dans le second cas.

Graphe d'une relation binaire

27. Soit $E = \{A, B, C, D\}$ où A, B, C et D sont des ensembles dont les positions respectives sont précisées dans le diagramme d'Euler de la figure 1.1, page ci-contre. Construire le graphe de la relation binaire définie sur E par :

$$X \mathcal{R} Y \Longleftrightarrow X \cap Y \neq \emptyset$$

Analyse de l'énoncé et conseils. On représente les éléments de E sur un axe horizontal et un axe vertical et par un point les couples (X, Y) qui sont dans la relation $\mathcal{R}$.

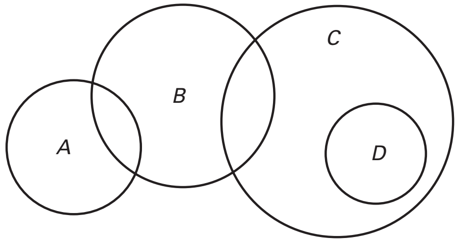

Figure 1.1.

28. Construire le graphe de la relation binaire définie sur $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ par : $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x + y$ est multiple de 3

Comment le graphe permet-il de savoir si la relation est symétrique ?

Analyse de l'énoncé et conseils. Voir exercice précédent.

Relation d'équivalence

29. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur E par : $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$

Montrer que c'est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence se réduisent à un seul élément si et seulement si f est injective.

Analyse de l'énoncé et conseils. Les propriétés qui caractérisent une relation d'équivalence sont faciles à vérifier. La définition de l'injection permet aussi d'établir sans difficulté l'équivalence demandée.

30. Montrer que la relation binaire définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ par :

$$(x, y)\ \mathcal{R}(x', y') \Longleftrightarrow xy' = yx'$$

est une relation d'équivalence. Déterminer la classe d'équivalence d'un élément donné (x_0, y_0).

Analyse de l'énoncé et conseils. On vérifie les trois propriétés qui caractérisent une relation d'équivalence et on montre ensuite que deux éléments équivalents sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ linéairement dépendants.

31. Montrer que la relation binaire définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + \frac{1}{y^2}$$

EXERCICES

est une relation d'équivalence. Déterminer la classe d'équivalence d'un élément donné x et préciser son cardinal.

Analyse de l'énoncé et conseils. Les propriétés qui caractérisent une relation d'équivalence sont faciles à vérifier. La classe d'équivalence de x s'obtient par résolution d'une équation en y, le nombre de racines distinctes dépendant de la valeur de x.

Préordre et ordre

32. Sur l'ensemble des stations de sport d'hiver, on définit la relation binaire suivante :

$$x\mathcal{R}y \iff \text{l'altitude de la station } x \text{ est supérieure ou égale à celle de } y$$

Préciser s'il s'agit d'une relation d'ordre ou de préordre.

Analyse de l'énoncé et conseils. On établira que cette relation est réflexive et transitive et on étudiera ensuite la propriété d'antisymétrie.

33. On définit la relation suivante sur $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y)\ \mathcal{R}\ (x', y') \iff yx^2 \leq y'x'^2$$

Préciser s'il s'agit d'une relation d'ordre ou de préordre.

Analyse de l'énoncé et conseils. Voir exercice précédent.

34. Soit x la note à une épreuve écrite et y la note à une épreuve orale. Le classement des candidats à ces épreuves se fait à partir de la relation suivante définie sur l'ensemble des couples de notes :

$$(x, y)\ \mathcal{R}\ (x', y') \iff [x < x'] \text{ ou } [x = x' \text{ et } y \leq y']$$

Montrer que c'est une relation d'ordre total.

Analyse de l'énoncé et conseils. On établit que cette relation est réflexive, transitive et antisymétrique et que deux couples de notes sont toujours comparables.

Relation fonctionnelle

35. On définit ci-après des relations binaires entre un élément x d'un ensemble E et un élément y d'un ensemble F. Indiquer celles qui sont des relations fonctionnelles et préciser alors l'ensemble de définition de la fonction.

a) Si E est un ensemble de consommateurs et F un ensemble de magasins, la relation s'énonce : *le consommateur x est client du magasin y.*

b) Si E est un ensemble d'ouvriers et F un ensemble d'usines, la relation s'énonce : *l'ouvrier x travaille dans l'usine y.*

c) Si E est un ensemble d'étudiants d'une université et F l'ensemble des UFR, la relation s'énonce : *l'étudiant x appartient à l'UFR y.*

Analyse de l'énoncé et conseils. La relation sera fonctionnelle si on trouve un élément unique y qui est en relation avec un élément x quelconque, fixé.

36. On définit ci-après des relations binaires entre un élément d'un ensemble E et un élément d'un ensemble F. Indiquer celles qui sont des relations fonctionnelles et préciser alors si l'application est injective, surjective ou bijective.

a) $X\mathcal{R}Y \iff Y = X^c, \qquad E = F = \mathcal{P}(G), G$ ensemble quelconque ;

b) $(x, x')\ \mathcal{R}\ (y, y') \iff x - y = x' - y', \qquad E = F = \mathbb{N}^2$;

c) $(x, x')\ \mathcal{R}y \iff y = xx', \qquad E = \mathbb{N}^2, F = \mathbb{N}$.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il faut examiner si pour tout élément de E il y a un élément unique de F qui est en relation binaire avec lui. Si deux éléments distincts de E sont en relation avec deux éléments distincts de F, l'application est injective. Si pour tout élément de F on peut trouver un élément de E qui est en relation avec lui, l'application est surjective ; si cet élément est unique, l'application est bijective.

37. On définit ci-après des relations binaires sur un ensemble E. Indiquer celles qui définissent une fonction et préciser alors si elle est injective, surjective ou bijective.

a) $x\mathcal{R}y \iff x < y, \quad E = \mathbb{N}$;

b) $x\mathcal{R}y \iff x = 2y, \quad E = \mathbb{N}$;

c) $x\mathcal{R}y \iff y = 3x, \quad E = \mathbb{N}$;

d) $x\mathcal{R}y \iff x^2y \leq 0, \quad E = \mathbb{R}_+$;

e) $x\mathcal{R}y \iff x = y^2, \quad E = \mathbb{R}_+$.

Analyse de l'énoncé et conseils. La relation sera fonctionnelle si on trouve un élément unique y qui est en relation avec un élément x quelconque, fixé. L'application est injective si deux éléments distincts ont des images distinctes. Si pour tout y on peut trouver un élément x tel que $x\mathcal{R}y$, l'application est surjective ; si cet élément x est unique, l'application est bijective.

Application composée

38. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans lui-même définie par : $f : x \longmapsto |x|$

et g l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g : x \longmapsto \sqrt{x}$

Déterminer les applications composées $f \circ g$ et $g \circ f$.

EXERCICES

Analyse de l'énoncé et conseils. On vérifie que ces deux applications existent et on les exprime en étant attentif aux ensembles de départ et d'arrivée.

39. Soit f l'application définie par :

$$f : x \longmapsto \frac{2x-3}{x-2}$$

Montrer que c'est une bijection d'un ensemble D, que l'on précisera, sur lui-même et déterminer l'application composée $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ où n est un entier positif.

Analyse de l'énoncé et conseils. On déterminera l'ensemble de définition, puis l'ensemble image de cette fonction. On déterminera ensuite l'application réciproque f^{-1}, ce qui permettra d'en déduire $f \circ f = f^2$. On distinguera ensuite suivant la parité de n pour exprimer f^n.

Application réciproque

40. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \longmapsto \frac{x}{1+|x|}$$

Déterminer l'ensemble F pour que f soit une bijection de $\mathbb{R}$ dans F et déterminer alors l'application réciproque f^{-1}.

Analyse de l'énoncé et conseils. On vérifie que l'application est injective et ensuite on détermine l'ensemble image $f(\mathbb{R})$. L'application réciproque est définie pour $y \in f(\mathbb{R})$ en cherchant la solution unique x de l'équation $y = f(x)$.

41. Soit f l'application de $E =]1, +\infty[$ dans lui-même définie par :

$$f : x \longmapsto \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

Déterminer l'application réciproque f^{-1}.

Analyse de l'énoncé et conseils. L'application réciproque est définie pour $y \in E$ en cherchant la solution unique x de l'équation $y = f(x)$.

SOLUTIONS

1. Vrai. Si C est contenu dans A et dans B, tout élément de C appartient à la fois à A et B, donc C est inclus dans $A \cap B$.

2. Faux. Par exemple, si $\mathcal{E}$ est la famille des intervalles fermés sur $\mathbb{R}$, la réunion de $[0, 1]$ et de $[2, 3]$ n'est pas un intervalle.

3. Vrai. Il est facile de vérifier que l'inclusion au sens large est une relation d'ordre partiel, deux ensembles quelconques n'étant pas forcément comparables.

4. Vrai. Supposons la relation $A \subset B$ vérifiée, avec x élément de B^c. Si on avait $x \in A$, alors on aurait $x \in B$, ce qui est impossible ; donc $x \in A^c$, ce qui prouve la relation $B^c \subset A^c$. L'autre implication se démontre de la même façon.

5. Vrai. Soit b un élément de $Cl\ (a)$. La relation étant symétrique, a est élément de $Cl\ (b)$, et par transitivité tout élément de $Cl\ (a)$ est élément de $Cl\ (b)$. Les deux classes sont donc confondues.

6. Vrai. Il suffit d'établir l'équivalence entre injection et surjection. Si f est injective, c'est une bijection de E sur $f(E)$, qui a donc même cardinal que E et comme $f(E) \subset E$ on a donc $f(E) = E$. Si f est surjective, tout élément x de E est l'image d'un autre élément de E, donc il existe une application h de E dans E telle que $f \circ h = i_E$, application identique. L'application h est évidemment injective, donc surjective d'après ce qui précède et par conséquent bijective. L'application f est donc sa réciproque et par suite elle est injective.

7. Faux. L'application inverse de l'application identique $x \longmapsto x$ est bien sûr l'application $x \longmapsto x$. Si vous êtes tombé dans le piège, c'est à cause de la terminologie « application inverse ». Il est préférable de dire application réciproque.

8. Faux. Vous pouvez vérifier aisément que la réciproque de $g \circ f$ est $f^{-1} \circ g^{-1}$.

9. Par distributivité on obtient $X = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ et donc en général $X \supset Y$. Pour que les deux ensembles soient confondus, il faudrait que $A \cup C = A$, c'est-à-dire que $C \subset A$.

10. Par définition de la différence :

$$X = A \cap B^c \cap C^c$$

$$Y = A \cap (B \cap C^c)^c = A \cap (B^c \cup C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C)$$

Si on décompose Y à l'aide de C et C^c, on obtient :

$$Y = (Y \cap C) \cup (Y \cap C^c) = (A \cap C) \cup X$$

SOLUTIONS

ce qui montre qu'en général $Y \subset X$, l'égalité des ensembles ayant lieu lorsque A et C sont disjoints. Lorsque $A \cap C = \emptyset$ on a donc $(A - B) - C = A - (B - C)$.

11. De façon évidente, comme $E \in \mathcal{P}(E)$ et $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ on obtient $F = E$ et $G = \emptyset$. L'union de toutes les parties de E donne l'ensemble lui-même et leur intersection se réduit à l'ensemble vide.

12. Si $y \in f(A)$, alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Comme par ailleurs $x \in B$ on a donc $y \in f(B)$ ce qui démontre l'inclusion $f(A) \subset f(B)$.

Affirmer que y est un élément de $f(A \cup B)$ est équivalent à dire qu'il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$ ce qui peut s'énoncer encore, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$ ou il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$. Cela est à nouveau équivalent à $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$, qui s'écrit aussi $y \in f(A) \cup f(B)$. Toutes ces affirmations étant équivalentes, on a donc bien $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Si $y \in f(A \cap B)$, il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. On a donc $x \in A$ avec $y = f(x)$ et $x \in B$ avec $y = f(x)$, par conséquent y appartient à $f(A)$ et $f(B)$. Cela établit que $f(A \cap B)$ est inclus dans $f(A) \cap f(B)$.

Dans le cas où f est injective, compte tenu du résultat précédent, il suffit d'établir que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Si $y \in f(A) \cap f(B)$, il existe $x_1 \in A$ et $x_2 \in B$ tels que $y = f(x_1)$ et $y = f(x_2)$. Comme f est injective, on a donc $x_1 = x_2$ et ainsi $x_1 \in A \cap B$ donc $f(x_1) \in f(A \cap B)$. Ceci établit le résultat. Prenons l'exemple de l'application f de $E = \{a, b, c\}$ dans $F = \{1, 2\}$ définie par $f(a) = f(b) = 1$ et $f(c) = 2$, et qui n'est donc pas injective. En prenant $A = \{a, c\}$ et $B = \{b, c\}$ on obtient $f(A) = f(B) = F$ et $f(A \cap B) = \{2\} \neq F$.

On a l'inclusion stricte de $f(A \cap B)$ dans $f(A) \cap f(B) = F$.

13. Soit $x \in f^{-1}(A)$; alors $f(x) \in A$ et par conséquent $f(x) \in B$ donc $x \in f^{-1}(B)$.

On a les équivalences suivantes :

$$x \in f^{-1}(A \cup B) \iff f(x) \in A \cup B \iff f(x) \in A \text{ ou } f(x) \in B$$
$$\iff x \in f^{-1}(A) \text{ ou } x \in f^{-1}(B) \iff x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

ce qui établit l'égalité demandée.

De la même manière :

$$x \in f^{-1}(A \cap B) \iff f(x) \in A \cap B \iff f(x) \in A \text{ et } f(x) \in B$$
$$\iff x \in f^{-1}(A) \text{ et } x \in f^{-1}(B) \iff x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

Enfin : $x \in f^{-1}(A^c) \iff f(x) \in A^c \iff f(x) \notin A \iff x \notin f^{-1}(A)$

$$\iff x \in [f^{-1}(A)]^c$$

14. Si $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$, donc $f^{-1}[\{f(x)\}] \subset f^{-1}[f(A)]$. Bien entendu $x \in f^{-1}[\{f(x)\}]$ et par conséquent $x \in f^{-1}[f(A)]$.

Si $y \in f[f^{-1}(B)]$, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$ et de plus $f(x) \in B$. On a donc bien $y \in B$.

Si $x \in f^{-1}[f(A)]$ alors $y = f(x) \in f(A)$. Il existe donc $x' \in A$ tel que $y = f(x')$. Comme f est injective, on en déduit que $x = x'$ et par conséquent $x \in A$.

Si $y \in B$, comme f est surjective il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Si $f(x) \in B$ c'est que $x \in f^{-1}(B)$ et donc $y = f(x) \in f[f^{-1}(B)]$.

15. D'après la propriété de distributivité des opérations d'union et d'intersection, on peut écrire :

$$X = (A \cup A^c) \cap B = E \cap B = B$$
$$Y = A^c \cup (B^c \cap B) = A^c \cup \emptyset = A^c$$

D'après la loi de Morgan, l'intersection des complémentaires est le complémentaire de la réunion, soit ici :

$$Z = [(A^c \cap B) \cup (A \cap B)]^c = X^c = B^c$$

Toujours par distributivité, on obtient :

$$(B \cap C) \cup C^c = (B \cup C^c) \cap (C \cup C^c) = B \cup C^c$$

et ainsi : $U = [A \cap (B \cup C)] \cap (B \cup C^c) = A \cap [(B \cup C) \cap (B \cup C^c)]$

en utilisant cette fois l'associativité. Enfin, d'après la distributivité :

$$U = A \cap [B \cup (C \cap C^c)] = A \cap B$$

On applique une première fois l'identité de Morgan :

$$V = (A \cap B) \cup (A^c \cap C) \cup [(A^c \cup B)^c \cup (A \cup C)^c]$$

puis une seconde fois :

$$V = (A \cap B) \cup (A^c \cap C) \cup [(A \cap B^c) \cup (A^c \cap C^c)]$$

On utilise ensuite l'associativité, puis on groupe les termes par deux en raison de la distributivité :

$$V = [A \cap (B \cup B^c)] \cup [A^c \cap (C \cup C^c)] = A \cup A^c = E$$

Comme $B \cap C$ est inclus dans C, le dernier terme de W se réduit à C qui est lui-même inclus dans $A \cup C$ et par conséquent :

$$W = C \cap [(A \cup B \cup C)^c \cup (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c)]$$

Enfin, comme C est inclus dans $A \cup B \cup C$, son complémentaire contient $(A \cup B \cup C)^c$. Chacun des termes du crochet est inclus dans C^c, donc son intersection avec C est l'ensemble vide : $W = \emptyset$.

16. La différence $A - B$ est l'intersection de A avec B^c. Le complémentaire de B est l'ensemble des entiers impairs, donc $A - B$ est l'ensemble des

SOLUTIONS

entiers qui peuvent s'écrire sous la forme $5(2p + 1)$, c'est-à-dire des entiers dont le chiffre des unités est 5.

17. Cette partition va comporter $2^3 = 8$ atomes. En effet, pour déterminer l'atome auquel appartient un élément déterminé x de E, il faut répondre par oui un non successivement aux questions : appartient-il à A ? appartient-il à B ? appartient-il à C ? Les réponses « oui, non, non » par exemple correspondent à l'atome $A \cap B^c \cap C^c$. Ces atomes sont donc :

$$A \cap B \cap C,\ A \cap B \cap C^c,\ A \cap B^c \cap C,\ A \cap B^c \cap C^c,$$
$$A^c \cap B \cap C,\ A^c \cap B \cap C^c,\ A^c \cap B^c \cap C,\ A^c \cap B^c \cap C^c$$

Ces atomes sont numérotés de 1 à 8, dans l'ordre où ils apparaissent, pour être repérés dans la représentation d'Euler de la figure 1.2.

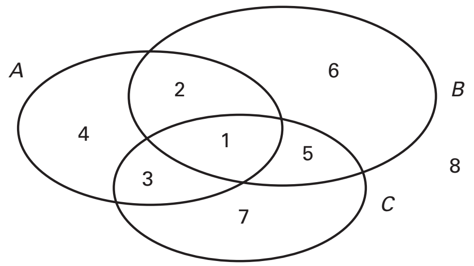

Figure 1.2.

18. La différence symétrique de deux ensembles peut s'écrire :

$$A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$$

Son complémentaire est donc :

$$(A\Delta B)^c = (A \cup B)^c \cup (A \cap B) = (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B)$$

L'ensemble demandé est alors défini par :

$$\begin{aligned}(A\Delta B)\Delta C &= [(A\Delta B) \cap C^c] \cup [(A\Delta B)^c \cap C] \\ &= (A \cap B^c \cap C^c) \cap (A^c \cap B \cap C^c) \cap (A^c \cap B^c \cap C) \cap (A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

qui est une décomposition en quatre atomes.

19. Nous allons partir de l'hypothèse $A \subset B$.

On a toujours l'inclusion $A \cap B \subset A$. Tout élément de A appartient à B, donc aussi à $A \cap B$, ce qui établit l'autre inclusion $A \subset A \cap B$, donc l'égalité $A \cap B = A$.

On a toujours aussi $B \subset A \cup B$. Si un élément appartient à $A \cup B$, c'est qu'il appartient soit à A, soit à B ; s'il appartient à A, il est aussi dans B, donc on a établi l'inclusion $A \cup B \subset B$, donc $A \cup B = B$.

Enfin, si $x \in B^c$, il ne peut pas appartenir à A car il serait alors dans B, ce qui démontre l'inclusion $B^c \subset A^c$.

Partons maintenant de l'hypothèse $B^c \subset A^c$. Si $x \in A$ il ne peut pas appartenir à B^c car il serait alors dans A^c, ce qui établit l'inclusion $A \subset B$. On a donc démontré les implications suivantes :

$$A \subset B \Longrightarrow A \cap B = A \Longrightarrow A \cup B = B \Longrightarrow B^c \subset A^c \Longrightarrow A \subset B$$

ce qui prouve l'équivalence de ces propositions.

20. Un élément de B appartient à $A \cup B$, donc à $A \cup C$. S'il appartient à C le résultat $B \subset C$ est démontré. Supposons donc qu'il appartient à A, c'est donc un élément de $A \cap B$ d'où par hypothèse un élément de $A \cap C$ et par conséquent de C. Cela démontre l'inclusion $B \subset C$.

21. Les deux premières propriétés sont les lois de Morgan pour $n = 2$. Si on les suppose vraies pour l'ensemble d'indices $J = \{1, ..., n-1\}$, on établira le résultat pour $I = \{1, ..., n\}$ en écrivant :

$$\bigcup_{i \in I} A_i^c = \left(\bigcup_{i \in J} A_i^c\right) \cup A_n^c = \left(\bigcap_{i \in J} A_i\right)^c \cup A_n^c$$

$$= \left[\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) \cap A_n\right]^c = \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i^c = \left(\bigcap_{i \in J} A_i^c\right) \cap A_n^c = \left(\bigcup_{i \in J} A_i\right)^c \cap A_n^c$$

$$= \left[\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) \cup A_n\right]^c = \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c$$

La distributivité de la réunion et de l'intersection étant vraie pour $n = 2$, on démontre les deux propriétés suivantes en les supposant vraies pour J et en écrivant :

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B = \left[\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) \cup A_n\right] \cap B$$

$$= \left[\bigcup_{i \in J} (A_i \cap B)\right] \cup (A_n \cap B) = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup B = \left[\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) \cap A_n\right] \cup B$$

$$= \left[\bigcap_{i \in J} (A_i \cup B)\right] \cap (A_n \cup B) = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B)$$

Les deux inclusions sont immédiates si on écrit :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = A_i \cap \left(\bigcap_{j \in I - \{i\}} A_j\right) \text{ et } \bigcup_{i \in I} A_i = A_i \cup \left(\bigcup_{j \in I - \{j\}} A_j\right)$$

SOLUTIONS

Pour démontrer la dernière propriété, nous allons établir l'inclusion de E dans la première union. Pour cela prenons un élément x de E qui appartient par hypothèse à $A_i \cup B_i$ pour tout indice i de I. Si on peut trouver un indice i tel que $x \in A_i$, alors $x \in \cup_{i \in I} A_i$ ce qui prouve l'inclusion :

$$E \subset \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right)$$

Dans le cas contraire, si x n'appartient à aucun des A_i c'est qu'il appartient à tous les $B_i : x \in \cap_{i \in I} B_i$. L'inclusion précédente est encore établie, ce qui prouve l'égalité de cet ensemble avec E. Les ensembles A_i et B_i jouant un rôle symétrique, l'autre égalité s'en déduit.

22. Les seules familles qui constituent une partition de X sont :

$$\{B, D, E\}, \ \{B, F, G\} \text{ et } \{C, F\}$$

23. a) La réunion des A_n donne bien l'ensemble $E = \mathbb{N}$ mais ces ensembles ne sont pas disjoints.

b) Même réponse.

c) Les ensembles A_n sont bien disjoints et ont pour réunion $\mathrm{E} = \mathbb{N}$, donc ils forment une partition de $\mathbb{N}$.

d) Les intervalles A_n sont disjoints et ont pour réunion $E = [0, +\infty[$, donc ils constituent une partition de $[0, +\infty[$.

e) Les intervalles A_n sont disjoints mais ont pour réunion $[1, +\infty[$.

f) Les intervalles A_n ont pour réunion $\mathrm{E} = \mathbb{R}$ mais ils ne sont pas disjoints.

24. La différence symétrique $A \Delta B$ peut s'écrire comme la différence :

$$(A \cup B) - (A \cap B)$$

c'est-à-dire comme le complémentaire de $A \cap B$ par rapport à $A \cup B$. Par conséquent : $\text{card}\,(A \,\Delta\, B) = \text{card}\,(A \cup B) - \text{card}\,(A \cap B)$

$$= \text{card}\, A + \text{card}\, B - 2 \ \text{card}\,(A \cap B)$$

25. On obtient à partir du cardinal de l'union de deux ensembles :

$$\begin{aligned} \text{card}\,[(A_1 \cup A_2) \cup A_3] &= \text{card}\,(A_1 \cup A_2) + \text{card}\, A_3 - \text{card}\,[(A_1 \cup A_2) \cap A_3] \\ &= n_1 + n_2 - n_{12} + n_3 \\ &\quad - [\text{card}\,(A_1 \cap A_3) + \text{card}(A_2 \cap A_3) - \text{card}\,(A_1 \cap A_2 \cap A_3)] \\ &= n_1 + n_2 + n_3 - n_{12} - n_{13} - n_{23} + n_{123} \end{aligned}$$

Ainsi : $\text{card}\,(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 45 - 17 - n_{13} + n_{123}$

On a bien sûr $n_{123} \leq n_{13}$, donc $\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \leq 28$. Par ailleurs, $n_{123} \geq 0$ et $n_{13} \leq n_1 = 10$ donc $\text{card}\,(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \geq 18$.

26. Le second lancer n'a lieu que si le premier résultat appartient à l'ensemble $\{1, 3\}$. Le second résultat est dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ donc l'ensemble des résultats possibles est le produit cartésien de ces deux ensembles :

$$\{1, 3\} \times \{1, 2, 3\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Si la somme des résultats est impaire, c'est que le second chiffre est aussi impair et l'ensemble des résultats possibles devient le carré cartésien :

$$\{1, 3\}^2 = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3)\}$$

27. Le graphe de cette relation est représenté dans la figure 1.3 et comprend tous les couples (X, Y) tels que X et Y ne sont pas disjoints. Il comprend la diagonale de E^2 et est symétrique par rapport à cette diagonale.

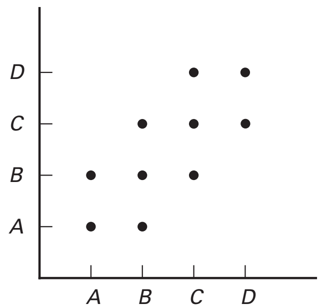

Figure 1.3.

28. Tous les couples (x, y) pour lesquels la somme $x + y$ est un multiple de 3 constituent le graphe de la relation, représenté dans la figure 1.4. Comme $x + y = y + x$, la relation est symétrique, ce qui se traduit par la symétrie du graphe par rapport à la diagonale de E^2.

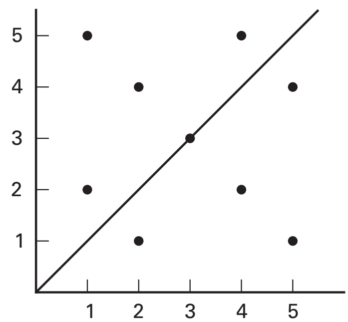

Figure 1.4.

29. La relation $\mathcal{R}$ est définie sur E par une égalité sur F, qui est bien sûr une relation d'équivalence, donc $\mathcal{R}$ est aussi une relation d'équivalence. La classe

SOLUTIONS

d'équivalence d'un élément fixé x de E est l'ensemble des éléments de E qui ont même image par f : $Cl(x) = \{y \in E / f(y) = f(x)\}$

Si f est injective, l'égalité $f(x) = f(y)$ implique $x = y$ et alors $Cl(x) = \{x\}$. Réciproquement, si $Cl(x) = \{x\}$ entraîne $x = y$, c'est que $f(x) = f(y)$ implique $x = y$, ce qui est bien la définition d'une injection.

30. La relation est réflexive, puisque $xy = yx$. Elle est aussi symétrique, puisque $x'y = yx' = xy' = y'x$ d'après la commutativité du produit de deux nombres réels. La transitivité se déduit des égalités $xy' = yx'$ et $x'y'' = y'x''$ qui impliquent par multiplication $(x'y')\,xy'' = (x'y')\,yx''$. On peut simplifier par $x'y'$ qui est non nul et l'égalité obtenue traduit la relation $(x, y)\ \mathcal{R}\ (x'', y'')$. Cette relation d'équivalence exprime la dépendance linéaire des vecteurs $(x,\ y)$ et (x', y'). Puisque x est non nul, on peut en effet écrire :

$$(x', y') = \left(x', \frac{y}{x}x'\right) = \frac{x'}{x}(x, y)$$

Réciproquement, si les vecteurs $(x,\ y)$ et (x', y') sont linéairement dépendants, il existe un nombre λ non nul tel que $(x', y') = \lambda(x, y)$ donc $x' = \lambda x$ et $y' = \lambda y$ et, par conséquent, $xy' = x(\lambda y) = (\lambda x)y = x'y$. La classe d'équivalence de (x_0, y_0) est donc l'ensemble des vecteurs colinéaires, soit : $\{(x, y) \,|\, (x, y) = \lambda(x_0, y_0), \lambda \in \mathbb{R}^*\}$

Vous avez compris ?

Si $(A_i)_{i \in I}$ est une partition d'un ensemble E, montrer que la relation binaire définie sur E par :

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \textit{il existe } i \in I \textit{ tel que } x \in A_i \textit{ et } y \in A_i$$

est une relation d'équivalence et déterminer les classes d'équivalence.

Réponse : cette relation est bien réflexive, symétrique et transitive et les classes d'équivalence sont les éléments A_i de la partition.

31. Les propriétés des nombres réels permettent de vérifier aisément que cette relation est réflexive, symétrique et transitive. Pour déterminer la classe d'équivalence d'un élément x fixé, il faut trouver tous les nombres réels y qui vérifient :

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + \frac{1}{y^2} \Longleftrightarrow y^2(1 + x^4) = x^2(1 + y^4)$$

$$\Longleftrightarrow x^2y^2(x^2 - y^2) + y^2 - x^2 = 0$$

L'équation à résoudre se factorise sous la forme : $(x^2y^2 - 1)(x^2 - y^2) = 0$ et admet quatre solutions en général, ce qui correspond à la classe d'équivalence :

$$Cl(x) = \left\{x, -x, \frac{1}{x}, -\frac{1}{x}\right\}$$

Dans le cas particulier $x = 1$, la classe d'équivalence ne comporte que les deux éléments 1 et -1.

32. Cette relation se traduisant par une inégalité large est réflexive et transitive. Si les deux relations $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ sont réalisées, cela exprime simplement que ces deux stations sont situées à la même altitude, mais non pas qu'elles sont confondues. Il s'agit donc d'un préordre total, deux stations pouvant toujours être comparées par leur altitude.

Vous avez compris ?

Sur un ensemble de pays, on définit la relation $x\mathcal{R}y$ par « les exportations de y vers x sont supérieures ou égales à celles de x vers y ». Examiner s'il s'agit d'un ordre ou d'un préordre.

Réponse : cette relation n'est pas un préordre car elle n'est pas transitive.

33. Cette relation étant définie par une inégalité large est réflexive et transitive. Cependant, les relations $(x,y)\mathcal{R}(x', y')$ et $(x', y')\mathcal{R}(x, y)$ impliquent $yx^2 = y'x'^2$ qui n'entraîne pas $x = x'$ et $y = y'$, donc il s'agit seulement d'un préordre.

34. La relation est réflexive puisqu'on a bien $[x = x \text{ et } y \leq y]$. Pour démontrer qu'elle est transitive, examinons d'abord le cas $x < x'$: si $[x' < x'']$ ou $[x' = x'']$ et $[y' \leq y'']$, alors $x < x''$ et le résultat est établi. Dans le cas où $[x = x' \text{ et } y \leq y']'$: si $[x' < x'']$ alors $x' < x''$; si $[x' = x'' \text{ et } y' \leq y'']$, alors $[x = x'' \text{ et } y \leq y'']$. On a ainsi prouvé dans tous les cas l'implication :

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \text{ et } (x', y')\mathcal{R}(x'', y'') \Longrightarrow (x, y)\mathcal{R}(x'', y'')$$

Examinons maintenant l'antisymétrie. Si on a simultanément $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ et $(x', y')\mathcal{R}(x, y)$ on ne peut pas avoir $x < x'$ ou $x' < x$. Par conséquent on a $x = x'$ avec de plus $y \leq y'$ et $y' \leq y$ donc aussi $y = y'$. L'ordre est total car deux notes sont toujours comparables.

35. a) Un consommateur pouvant être client de plusieurs magasins, cette relation n'est pas fonctionnelle.

b) C'est une application si l'ensemble E ne comporte pas de chômeurs et s'il n'est pas possible de cumuler des emplois.

c) C'est une application si on interdit le rattachement à plusieurs UFR.

SOLUTIONS

Vous avez compris ?

Si E est l'ensemble des électeurs du premier tour d'une élection présidentielle et F l'ensemble des candidats, indiquer si la relation « l'électeur x a voté pour le candidat y » est fonctionnelle.

Réponse : c'est une relation fonctionnelle si E ne contient aucun abstentionniste, ni aucun électeur ayant voté blanc ou nul.

36. a) La relation $Y = X^c$ définit pour tout X un élément unique Y, donc il s'agit bien d'une application. Comme cette relation est équivalente à $X = Y^c$, chaque Y de F définit un élément unique X de E et cette fonction est donc bijective.

b) Tous les couples $(y, y + x' - x)$ sont en relation avec (x, x') pour toutes les valeurs réelles de y, donc cette relation n'est pas fonctionnelle.

c) La relation $y = xx'$ définit un entier unique y, donc est fonctionnelle. Les couples (x, x') et (x', x) ayant la même image par cette application, pour $x \neq x'$, elle n'est pas injective. Tout entier y est l'image du couple d'entiers $(y, 1)$ donc c'est une surjection.

37. a) Tous les entiers $x + 1,\ x + 2, \dots$ sont en relation avec x, donc cette relation n'est pas fonctionnelle.

b) Si x est impair, on ne peut pas trouver d'entier y tel que $x = 2y$, donc cette relation ne définit pas une fonction.

c) Pour tout entier x, il y a un entier unique défini par $y = 3x$, donc cette relation est fonctionnelle. Pour $x \neq x'$, on a bien sûr $3x \neq 3x'$ donc l'application est injective. Seuls les entiers y multiples de 3 ont un antécédent x entier, donc elle n'est pas surjective.

d) Tous les réels non nuls ont pour image $y = 0$, mais pour $x = 0$ il n'y a pas un réel unique y tel que $x^2 y \leq 0$, donc cette relation n'est pas fonctionnelle.

e) Pour x et y réels positifs, la relation $x = y^2$ est équivalente à $y = \sqrt{x}$, donc cette relation définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même.

Vous avez compris ?

On considère la relation binaire entre les éléments x de E et y de F :

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow y = 2|x|$$

Préciser si elle définit une application injective, surjective ou bijective dans les cas suivants :

$$E = F = \mathbb{N}\ ; \quad E = F = \mathbb{Z}; \quad E = F = \mathbb{R}; \quad E = \mathbb{R}_-, F = \mathbb{R}_+$$

Réponse : cette relation définit une application injective dans le premier cas, ni injective, ni surjective dans les deux cas suivants et bijective dans le dernier cas.

38. L'application f étant définie sur tout $\mathbb{R}$, la composée $f \circ g$ est toujours définie. Son ensemble de départ est celui de g, soit $\mathbb{R}_+$. Son ensemble d'arrivée est celui de f, soit $\mathbb{R}$. L'application $f \circ g$ est définie par :

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{x}) = \sqrt{x}$$

La valeur de $f\ (x)$ étant dans $\mathbb{R}_+$, qui est l'ensemble de départ de g, l'application $g \circ f$ existe. Son ensemble de départ est celui de f, soit $\mathbb{R}$, et son ensemble d'arrivée celui de g, soit $\mathbb{R}$. Elle est définie par :

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(|x|) = \sqrt{|x|}$$

Ces deux applications ne coïncident pas, $f \circ g$ n'étant définie que sur $\mathbb{R}_+$.

Vous avez compris ?

Soit f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans lui-même définies par $f(n) = 2n$, $g(2k) = k$ et $g(2k+1) = 2k+1$, pour n et k entiers. Déterminer les applications composées $f \circ g$ et $g \circ f$.

Réponse : $(g \circ f)(n) = n$, $(f \circ g)(2k) = 2k$, $(f \circ g)(2k+1) = 4k+2$

39. Cette application est définie pour $x \in \mathbb{R} - \{2\} = \mathcal{D}$ et peut s'écrire :

$$f(x) = \frac{2x - 4 + 1}{x - 2} = 2 + \frac{1}{x - 2}$$

Quand x croît de $-\infty$ à 2, $f(x)$ décroît de 2 à $-\infty$ et quand x croît de 2 à $+\infty$, $f(x)$ décroît de $+\infty$ à 2. C'est donc une surjection de D dans lui-même. Pour y fixé dans D, l'équation en x : $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$

admet une solution unique : $x = \dfrac{2y-3}{y-2}$

L'application f est donc bijective et on remarque de plus qu'elle est égale à sa réciproque : $f^{-1} = f$. Par conséquent, on aura $f^2 = f \circ f = f \circ f^{-1} = i_D$ ou i_D est l'application identique dans D. Plus généralement, pour tout entier positif p, on aura $f^{2p} = (f^2)^p = i_D$ et $f^{2p+1} = f \circ f^{2p} = f$.

40. Pour établir que f est injective, nous allons supposer que $f(x) = f(x')$, ce qui impose que x et x' soient de même signe. S'ils sont positifs, on a alors :

$$\frac{x}{1+x} = \frac{x'}{1+x'}$$

ce qui implique $x = x'$.

De même, s'ils sont négatifs, on en déduit : $\dfrac{x}{1-x} = \dfrac{x'}{1-x'}$

SOLUTIONS

ce qui entraîne encore $x = x'$. Cette fonction est impaire, avec pour $x > 0$:

$$f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$$

Quand x croît de 0 à $+\infty$, $f(x)$ croît de 0 à 1. On a donc $f(\mathbb{R}_+) = [0, 1[$ et par conséquent $F = f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$. L'application réciproque est aussi impaire et on peut donc la déterminer pour $y \in [0, 1[$ en cherchant la solution x de l'équation : $y = \dfrac{x}{1+|x|}$

On en déduit d'abord $x > 0$, puis la solution unique : $x = \dfrac{y}{1-y}$

Ainsi, pour $x \in [0, 1[$ la réciproque est définie par : $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-x}$

Pour $x \in]-1, 0]$, on a $-x \in [0, 1[$ et on obtient, puisque f^{-1} est impaire : $f^{-1}(x) = -f^{-1}(-x) = -\dfrac{-x}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$

Pour $x \in]-1, 1[$ on peut donc écrire : $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$

Vous avez compris ?

Déterminer l'application réciproque de l'application f de $[1, +\infty[$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *définie par* $f(x) = 2x - 2$.

Réponse : f^{-1} *est l'application de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $[1, +\infty[$ *définie par* $f^{-1}(x) = 1 + x/2$.

41. Pour y fixé dans $E =]1, +\infty[$, l'équation en x : $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ admet une solution unique : $x = \dfrac{y^2+1}{y^2-1} = 1 + \dfrac{2}{y^2-1}$

qui est bien dans E, ce qui prouve que l'application est bijective, et définit l'application réciproque de E dans lui-même par : $f^{-1} : x \longmapsto \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

TD 2 Analyse combinatoire

COURS

L'ESSENTIEL

Ce chapitre contient les formules de base de la combinatoire, branche des mathématiques qui permet d'effectuer des dénombrements. Il est essentiel de retenir avec précision les définitions des permutations, arrangements et combinaisons. Les coefficients binomiaux possèdent un grand nombre de propriétés et il est important de connaître les principales. La formule du binôme de Newton est fondamentale et permet de calculer de nombreuses sommes qui s'expriment à l'aide des coefficients binomiaux.

1 Formules de dénombrement

1.1 Définitions

- Si n est un entier positif, on appelle *factorielle n* le nombre noté $n!$ et formé par le produit de tous les entiers de 1 à n :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^{n} k$$

On a bien sûr $(n+1)! = (n+1) \times n!$ et par convention $0! = 1$. Pour tout entier $m < n$:

$$\frac{n!}{m!} = \prod_{k=1}^{n-m} (m+k)$$

- Soit E un ensemble de n éléments distincts et un entier $p \leq n$. On appelle *arrangement* p à p des n éléments de E tout sous-ensemble ordonné de E ayant p éléments distincts. Ce sous-ensemble est appelé aussi p – *liste* sans répétition. Le nombre total de ces arrangements est :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

C'est également le nombre d'injections d'un ensemble F à p éléments distincts dans E.

- On appelle *permutation* de n éléments de l'ensemble E tout ensemble ordonné formé par ces n éléments. Le nombre total de permutations est :

$$P_n = n!$$

Notons que $P_n = A_n^n$. C'est également le nombre de bijections de l'ensemble E dans lui-même.

- On appelle *combinaison* p à p des n éléments de l'ensemble E tout sous-ensemble de E ayant p éléments. Le nombre total de ces combinaisons est :

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

1.2 Relations entre ces nombres

Les nombres précédents sont liés par les relations suivantes :

$$A_n^p = p!C_n^p = P_p C_n^p \qquad P_n = A_n^n = P_{n-p}A_n^p$$

2 Formule du binôme de Newton

Si x et y sont deux éléments d'un anneau commutatif, le développement de $(x+y)^n$, pour tout entier positif n, est donné par la *formule du binôme de Newton* :

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} \\ &= x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \cdots + C_n^k x^k y^{n-k} + \cdots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + y^n\end{aligned}$$

Propriétés

Parmi les nombreuses propriétés des nombres C_n^k, appelés aussi coefficients binomiaux, on a la relation évidente :

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

Ces coefficients peuvent se calculer à partir de la relation de récurrence :

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

ou des relations :

$$C_n^{p+1} = \frac{n-p}{p+1} C_n^p \qquad C_n^p = \frac{n}{n-p} C_{n-1}^p$$

Q.C.M

	Vrai	Faux
1. Le nombre total de rangements de p objets dans n cases qui ne peuvent en contenir qu'un seul est égal à A_n^p.	○	○
2. Le nombre total de rangements de p objets dans n cases qui peuvent en contenir un nombre quelconque est p^n.	○	○
3. On peut fabriquer $n!$ colliers distincts avec n perles différentes.	○	○
4. Le nombre d'échantillons distincts obtenus en effectuant k tirages sans remise dans une urne qui contient n boules numérotées de 1 à n est égal à C_n^k.	○	○
5. Le nombre de sous-ensembles d'un ensemble E de cardinal n qui n'ont aucun élément commun avec un sous-ensemble donné A de cardinal p est 2^{n-p}.	○	○
6. Si A et B sont deux matrices carrées de même ordre, on peut utiliser la formule du binôme pour développer $(A+B)^n$.	○	○

RÉFLEXION

7. Déterminer par dénombrement la valeur de la somme : $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n$

On considérera pour cela les sous-ensembles à k éléments d'un ensemble donné à n éléments.

8. Utiliser la formule du binôme pour déterminer la valeur des sommes suivantes :

$$S = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n \qquad P = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots$$

$$D = C_n^0 - C_n^1 + \cdots + (-1)^n C_n^n \qquad I = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots$$

9. Soit E un ensemble fini de $2n$ éléments que l'on partage en deux sous-ensembles E_1 et E_2 ayant chacun n éléments. Déterminer par dénombrement la valeur de la somme : $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2$

10. On effectue k tirages avec remise dans une urne qui contient n boules numérotées de 1 à n. Déterminer le nombre d'échantillons distincts que l'on peut obtenir.

11. Soit E un ensemble fini à n éléments mais qui ne comporte que k éléments e_i $(1 \leq i \leq k)$ distincts, chaque élément e_i étant présent n_i fois, avec bien sûr $n_1 + \cdots + n_k = n$. Déterminer le nombre de suites ordonnées distinctes que l'on peut former avec ces n éléments.

12. Soit E un ensemble fini à n éléments et $P = \{p_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ un ensemble de n permutations distinctes de E. Déterminer le nombre d'ensembles P distincts.

ENTRAÎNEMENT

Formule de l'analyse combinatoire

13. Si p est un entier tel que $0 \leq p \leq n$ et n un entier quelconque, calculer la somme suivante : $C_p^p + C_{p+1}^p + \cdots + C_n^p$

Analyse de l'énoncé et conseils. On utilise la relation de récurrence sur les coefficients binomiaux.

Problèmes de dénombrement

14. Soit A_1, A_2, A_3 et A_4 quatre villes reliées entre elles par trois routes de A_1 à A_2, deux de A_2 à A_3 et cinq de A_3 à A_4. De combien de façons distinctes peut-on parcourir le chemin $A_1A_2A_3A_4$?

Analyse de l'énoncé et conseils. Un chemin est un élément d'un produit d'ensembles.

15. Calculer le cardinal de l'ensemble $E = \{(i,j) \mid i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i < j \leq n\}$ et en déduire la valeur de la somme : $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$

Analyse de l'énoncé et conseils. On peut calculer card E de deux manières différentes. En fixant j et considérant alors toutes les valeurs possibles de i. Ou bien, en dénombrant directement tous les couples (i, j) tels que $i \neq j$ et en notant que i et j jouent un rôle symétrique.

16. Avec trois chiffres distincts donnés différents de 0, combien de nombres distincts peut-on former ?

Analyse de l'énoncé et conseils. Il faut distinguer les nombres à un, deux ou trois chiffres.

17. Avec les chiffres 0, 1, 2, 3 et 4, combien peut-on écrire d'années au-delà de 2000 en utilisant une seule fois le même chiffre ?

Analyse de l'énoncé et conseils. Il faut être attentif au nombre de chiffres de l'année.

18. Déterminer le nombre de résultats possibles quand on lance simultanément six pièces de monnaie distinctes. Combien de ces résultats comportent exactement k piles, avec k entier tel que $0 \leq k \leq 6$? Que deviennent ces réponses si les pièces sont identiques ?

Analyse de l'énoncé et conseils. Il faut préciser à chaque fois ce qui caractérise un résultat.

19. Dans une classe de 40 garçons et 20 filles on doit constituer un comité de classe de quatre personnes. Dénombrer ceux qui comportent au moins une fille, ceux dont le président est un garçon, ceux qui satisfont aux deux conditions précédentes.

Analyse de l'énoncé et conseils. Le premier dénombrement s'obtient en faisant intervenir la condition contraire.

20. Dans une course de 10 chevaux dont on connaît les 3 premiers arrivants, déterminer le nombre de classements possibles des 7 autres dans les cas suivants.

a) Tous les chevaux sont arrivés et il n'y a pas d'ex-aequo.

b) Deux chevaux ont été éliminés.

c) Tous les chevaux sont arrivés et il y a deux ex-aequo.

d) Deux chevaux sont éliminés et il y a deux ex-aequo.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il faut noter que le rang des ex-aequo n'est pas fixé.

21. Une assemblée régionale de 80 membres, dont 35 élus municipaux et 5 députés, doit élire une commission de 9 membres.

a) Déterminer le nombre de commissions distinctes dans le cas où son président doit être un député.

EXERCICES

b) Même question si en plus cette commission doit comporter trois élus municipaux exactement.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il suffit de respecter les contraintes et de préciser l'ensemble où peuvent être choisis les autres membres.

22. Une maîtresse de maison et son mari reçoivent 4 autres couples. Leurs deux places étant déterminées par avance, combien y a-t-il de dispositions possibles autour d'une table ronde pour les 8 invités ?

Si la seule contrainte est d'alterner hommes et femmes, combien y a-t-il de dispositions possibles des 10 convives ?

Analyse de l'énoncé et conseils. Deux dispositions sont différentes dès qu'une personne y occupe des places distinctes. En cas d'alternance, il faut remarquer qu'il y a deux façons d'associer deux permutations fixées d'hommes et de femmes.

23. Au jeu de bridge on distribue quatre mains de 13 cartes. Dénombrer les mains qui comportent :

– un seul as ;
– aucun cœur ;
– au moins un cœur ;
– quatre dames.

Analyse de l'énoncé et conseils. Une main est un sous-ensemble de 13 cartes choisies parmi 52 et il faut tenir compte à chaque fois des contraintes imposées.

24. Au poker, un joueur reçoit une main de 5 cartes provenant d'un jeu de 32 cartes où il y a quatre couleurs ($\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit$) et huit hauteurs (as, roi, dame, valet, 10, 9, 8, 7). Déterminer le nombre de mains qui comportent exactement :

– une paire (2 cartes de même hauteur) ;
– deux paires ;
– un brelan (3 cartes de même hauteur) ;
– un full (un brelan et une paire) ;
– un carré (4 cartes de même hauteur).

Calculer le nombre de mains banales, c'est-à-dire ne comportant aucune des dispositions précédentes et en déduire un moyen de vérifier la validité de l'ensemble des résultats obtenus.

Analyse de l'énoncé et conseils. On pourra représenter une main comportant une paire par exemple sous la forme *aabcd* où chaque lettre de l'alphabet représente une hauteur. Pour dénombrer les différentes dispositions, il ne faudra pas oublier d'associer les couleurs avec les hauteurs.