PASS TOUT EN FICHES

PHYSIQUE, BIOPHYSIQUE

PARCOURS
SANTÉ
& L.AS

Salah Belazreg

EDISCIENCE

11, rue Paul Bert 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-082893-7

Table des matières

Physique

[Mécanique]

[Thermodynamique]

[Mécanique des fluides]

[Électricité – Électromagnétisme]

[Ondes]

[Optique géométrique]

[Lumière et ondes]

Biophysique

[Biophysique des solutions]

[Les radiations ionisantes]

[Biophysique sensorielle]

[Imagerie médicale]

Compléments mathématiques

[Physique]

[Mécanique]
Cinématique du point

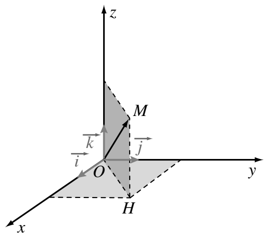
1. Repérage d'un point. Le paramètre position

a. En coordonnées cartésiennes

Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base orthonormale directe liée au référentiel $(\mathcal{R})$.
Tout point M peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z).
Si O est l'origine du repère, le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

x, y et z en m
$r = OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$: base orthonormale directe liée au référentiel

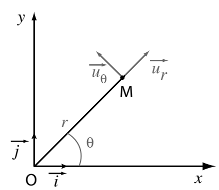


b. En coordonnées polaires (cas d'un mouvement plan)

On définit un axe Ox, axe polaire, et une origine ou pôle O.
Un point mobile M peut être repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) où $r = OM$ et $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$.
Le vecteur position s'écrit donc :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r} = r\,\overrightarrow{u_r}$$

$\overrightarrow{r}$: rayon vecteur
θ : angle polaire

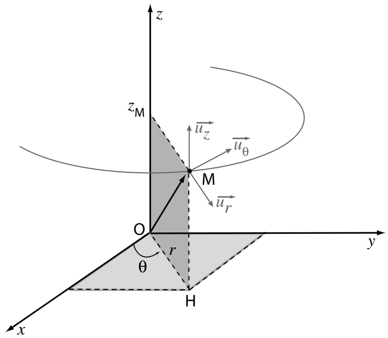


[IMPORTANT]

$(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ est une base locale mobile, orthonormée directe, liée au point M.

c. En coordonnées cylindriques

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z}$
Avec $r = OH$ et $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OH})$



2. Les grandeurs d'évolution

On définit la vitesse d'un point M dans le repère $\mathcal{R}$ par :

$$\overrightarrow{v} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$

L'accélération du mobile, à l'instant t, est la dérivée dans $(\mathcal{R})$ du vecteur vitesse par rapport au temps, soit :

$$\overrightarrow{a} = \left(\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}}$$

3. Expressions dans différents systèmes de coordonnées

a. En coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{v} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \dot{x}\,\overrightarrow{i} + \dot{y}\,\overrightarrow{j} + \dot{z}\,\overrightarrow{k}\,;\, \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \dot{z} = \frac{dz}{dt}$$

$$\overrightarrow{a} = \left(\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \ddot{x}\,\overrightarrow{i} + \ddot{y}\,\overrightarrow{j} + \ddot{z}\,\overrightarrow{k}\,;\, \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}, \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

b. En coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{v} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}$$

$$\overrightarrow{a} = \left(\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}$$

c. Dans le repère de Frenet

On introduit un repère mobile ($\overrightarrow{\tau}$, $\overrightarrow{n}$), lié au mobile M tel que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\tau} & : \text{vecteur unitaire porté par la tangente à la courbe et orienté dans le sens du mouvement} \\ \overrightarrow{n} & : \text{vecteur unitaire orthogonal à } \overrightarrow{\tau} \text{ et dirigé vers la concavité de la trajectoire} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{v} = v\,\overrightarrow{\tau}\ ;\ \overrightarrow{a} = a_\tau\,\overrightarrow{\tau} + a_n\,\overrightarrow{n} \ \text{ avec } \begin{cases} a_\tau = \dfrac{dv}{dt} \\ a_n = \dfrac{v^2}{R} \end{cases}$$

4. Étude de quelques mouvements usuels

a. Mouvement rectiligne uniforme

Pour un mouvement rectiligne uniforme $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{cste}$, par suite :

$$v = v_0 = cste \ \text{ et } x = v_0 t + x_0$$

b. Mouvement rectiligne uniformément varié

Un point mobile M a un mouvement rectiligne uniformément varié si $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_0} = a_0\,\overrightarrow{i} = \overrightarrow{cste}$, par suite :

(1) $a = a_0 = cste$

(2) $v = a_0 t + v_0$, soit $v^2 - v_0^2 = 2a_0(x - x_0)$

(3) $x = \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + x_0$

c. Mouvement rectiligne sinusoïdal

Définition

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal si sa trajectoire est une droite et sa loi horaire est une fonction sinusoïdale du temps, soit :

$$x = x_m \sin(\omega t + \phi) \quad \left| \begin{array}{l} x_m : \text{amplitude du mouvement} \\ \omega : \text{pulsation (en rad} \cdot \text{s}^{-1}) \\ \phi : \text{phase à l'origine (en rad)} \\ (\omega t + \phi) : \text{phase à la date } t \text{ (en rad)} \end{array} \right.$$

Vitesse et accélération du mobile

$$v = \dot{x} = \omega x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 \underbrace{x_m \sin(\omega t + \phi)}_{x(t)} = -\omega^2 x, \text{ soit } \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

d. Mouvement circulaire uniforme

Définition

Un point mobile M a un mouvement circulaire uniforme lorsqu'il se déplace sur un cercle fixe, de rayon R, par rapport au repère d'espace choisi à la vitesse angulaire $\omega_0 = \dot{\theta} = cste$.

Vitesse et accélération du mobile

$$\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = R\omega\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\overrightarrow{a} = -\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r} = -R\omega_0^2\overrightarrow{u_r}$$

L'accélération $\overrightarrow{a}$ est centripète et le mouvement est périodique de période $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

Dynamique du point matériel

1. Les éléments cinématiques

a. Quantité de mouvement d'un point matériel

Soit un point matériel M, de masse m, se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans un repère $(\mathcal{R})$.
Le vecteur quantité de mouvement du point matériel M, noté $\vec{p}$, dans le repère $(\mathcal{R})$ s'écrit :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$\vec{p}$: vecteur quantité de mouvement
m : masse du point matériel
$\vec{v}$: vecteur vitesse du point matériel

b. Énergie cinétique

Un point matériel de masse m, se déplaçant à la vitesse v, dans un référentiel $(\mathcal{R})$, possède une énergie cinétique telle que :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m\, v^2$$

$\mathcal{E}_c$ en J
m en kg
v en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

c. Relation entre énergie cinétique et quantité de mouvement

Comme $\vec{p} = m\vec{v}$, alors $\vec{p}^{\,2} = m^2\vec{v}^{\,2}$ et par suite :

$$\mathcal{E}_c = \frac{p^2}{2m};$$ p : module du vecteur quantité de mouvement

2. Les différentes lois de Newton

a. Principe d'inertie (1re loi de Newton)

Le centre d'inertie d'un solide (pseudo) isolé est tel que :

- s'il est au repos, il reste au repos ;
- s'il est en mouvement, son mouvement est rectiligne uniforme.

$$\sum \overrightarrow{f_{ext}} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{système isolé}\\ \text{ou}\\ \text{pseudo-isolé}\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c}\overrightarrow{v_G} = \overrightarrow{cste}\\ \left(\overrightarrow{p} = \overrightarrow{cste}\right)\end{array}$$

b. Relation fondamentale de la dynamique (2e loi de Newton)

Dans un référentiel galiléen, pour un point matériel de masse m, de quantité de mouvement $\overrightarrow{p}$, soumis à un ensemble de force

$\sum \overrightarrow{f_{ext}}$, on a :

$$\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = \sum \overrightarrow{f_{ext}}$$

Pour un point matériel de masse $m = cste$, on a :

$$m\overrightarrow{a_G} = \sum \overrightarrow{f_{ext}} \quad \left| \begin{array}{l} m : \text{masse du solide} \\ \overrightarrow{a_G} : \text{vecteur accélération du centre d'inertie} \\ \sum \overrightarrow{f_{ext}} : \text{ensemble des forces s'exerçant sur le solide} \end{array} \right.$$

c. Principe des actions réciproques (3e loi de Newton)

Si un système (A) exerce sur un système (B) une force $\overrightarrow{F_{A/B}}$ alors (B) exerce sur (A) une force $\overrightarrow{F_{B/A}}$ telle que :

$$\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}}$$

[ATTENTION]

Quel que soit l'état de mouvement de A par rapport à B, on a toujours l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}}$.

[Mécanique] Étude énergétique

1. Travail d'une force

a. Cas d'une force $\vec{F}$ constante

Lors d'un déplacement de son centre d'inertie d'un point A à un point B, le travail d'une force constante $\vec{F}$ agissant sur un solide animé d'un mouvement rectiligne par rapport à un référentiel $(\mathcal{R})$ est donné par :

$$W(\vec{F})_{A\mapsto B} = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$$

ou

$$W(\vec{F})_{A\mapsto B} = F\cdot AB\cdot\cos(\vec{F},\overrightarrow{AB})$$

F en N
AB en m
$W(\vec{F})_{A\mapsto B}$ en J

b. Cas d'une force variable pour un déplacement quelconque

Lors d'un déplacement élémentaire du point d'application d'une force $\vec{F}$ constante, le **travail élémentaire** δW vaut :

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{\delta l}$$

ou

$$\delta W(\vec{F}) = F\cdot\delta l\cdot\cos(\vec{F},\vec{\delta l})$$

F en N
δl en m
$\delta W(\vec{F})$ en J

Le **travail total** de la force $\vec{F}$ lorsque son point d'application se déplace de A en B s'écrit :

$$W(\vec{F})_{A\mapsto B} = \sum_A^B \delta W(\vec{F}) = \sum_A^B \vec{F}\cdot\vec{\delta l}$$

ou sous forme intégrale :

$$W(\vec{F})_{A\mapsto B} = \int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dl} \text{ avec } \vec{dl} = \overrightarrow{MM'} = \vec{v}\,dt$$

2. Théorème de l'énergie cinétique

a. Énergie cinétique

Un point matériel de masse m se déplaçant à la vitesse $\overrightarrow{v}$, dans un référentiel $(\mathcal{R})$, possède une énergie, appelée énergie cinétique, telle que :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{E}_c \text{ en J} \\ m \text{ en kg} \\ v \text{ en m} \cdot \text{s}^{-1} \end{array} \right.$$

b. Puissance d'une force

Par définition, la puissance est égale au travail fourni par unité de temps, soit :

$$\mathcal{P} = \frac{\delta W}{\delta t} \quad \left| \begin{array}{l} W \text{ en J} \\ t \text{ en s} \\ \mathcal{P} \text{ en W} \end{array} \right.$$

Pendant la durée δt, le point d'application de la force $\overrightarrow{F}$ s'est déplacé de $\overrightarrow{\delta l}$.

Le travail élémentaire s'écrit donc :

$$\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\delta l} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}\, dt, \text{ où } \overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{\delta l}}{\delta t}$$

et par suite :

$$\mathcal{P} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v} \quad \left| \begin{array}{l} F \text{ en N} \\ v \text{ en m} \cdot \text{s}^{-1} \\ \mathcal{P} \text{ en W} \end{array} \right.$$

c. Relation entre la puissance et l'énergie cinétique

On a $\mathcal{P} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}$. Comme $\overrightarrow{F} = m\dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt}$ alors $\mathcal{P} = m\dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt} \cdot \overrightarrow{v}$.

La masse m étant constante, on peut donc écrire :

$$\mathcal{P} = \frac{d}{dt}(\mathcal{E}_c) \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{P} \text{ en W} \\ \mathcal{E}_c \text{ en J} \end{array} \right.$$

d. Théorème de l'énergie cinétique

Pour un point M matériel, de masse m, se déplaçant à la vitesse $\overrightarrow{v}$, dans un référentiel $(\mathcal{R})$ galiléen, soumis à un ensemble de forces dont la résultante est $\overrightarrow{F}$:

$$d\mathcal{E}_c = \delta W(\overrightarrow{F}), \text{ soit } \Delta\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_{c2} - \mathcal{E}_{c1} = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} = \underset{1 \longrightarrow 2}{W}(\overrightarrow{F})$$

3. Énergie potentielle. Énergie mécanique

a. Force conservative

Une force $\overrightarrow{F}$ est dite conservative s'il existe une fonction $\mathcal{E}_p$, dépendant uniquement des coordonnées de position, telle que :

$$\begin{array}{c} d\mathcal{E}_p = -\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dl} \\ \mathcal{E}_p \text{ est homogène à une énergie} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{E}_p \text{ en J} \\ F \text{ en N} \\ l \text{ en m} \end{array} \right.$$

$\mathcal{E}_p$ est appelée énergie potentielle de la particule M associée à la force $\overrightarrow{F}$.

Dans le cas d'une force $\overrightarrow{F} = F(x) \cdot \overrightarrow{u_x}$ ne dépendant que d'une seule coordonnée x, on a :

$$d\mathcal{E}_p = -F(x) \cdot dx, \text{ soit } F(x) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}$$

b. Relation entre travail et énergie potentielle

Le travail élémentaire d'une force $\overrightarrow{F}$ est $\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dl}$.

Si $\overrightarrow{F}$ est conservative alors $\overrightarrow{F}$ dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ telle que $d\mathcal{E}_p = -\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dl}$, soit :

$$\delta W = -d\mathcal{E}_p$$

Le travail total de la force $\overrightarrow{F}$ s'écrit donc :

$$W(\overrightarrow{F})_{1\mapsto 2} = -\int_1^2 d\mathcal{E}_p = -\left[\mathcal{E}_p\right]_{\mathcal{E}_{p1}}^{\mathcal{E}_{p2}} = \mathcal{E}_{p1} - \mathcal{E}_{p2}$$

(Le travail de la force $\overrightarrow{F}$ est indépendant du chemin suivi)

c. Énergie mécanique d'un corps

Dans le cas d'un référentiel galiléen, on a vu que $d\mathcal{E}_c = \delta W$.

Si la force $\overrightarrow{F}$ est conservative, alors il existe une fonction $\mathcal{E}_p$ telle que $dW = -d\mathcal{E}_p$.

En combinant les deux dernières relations, on obtient $d\mathcal{E}_c = -d\mathcal{E}_p$, soit $d(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p) = 0$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \mathcal{E}_m = cste$$

La somme $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$, qui se conserve au cours du temps, est appelée énergie mécanique de la particule M.

[Mécanique] Chocs entre deux particules

1. Impulsion – Percusssion

Pour une particule de masse m et animée d'une vitesse $\overrightarrow{v}$ à l'instant t :

$$\overrightarrow{I} = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F}\,dt$$

$\overrightarrow{F}$: résultante des forces agissant sur la particule entre les instants t et $t + \Delta t$
$\overrightarrow{I}$: impulsion de la force $\overrightarrow{F}$

[IMPORTANT]

- Si $\overrightarrow{F}$ reste constante dans l'intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$ et si Δt est très petit alors $\overrightarrow{I}$ est appelé percussion.
- Comme $\overrightarrow{F} = \dfrac{d\overrightarrow{p}}{dt}$, alors : $\overrightarrow{I} = \int_{t_1}^{t_2} d\overrightarrow{p} = \Delta\overrightarrow{p}$

L'impulsion reçue par un point matériel est égale à la variation de la quantité de mouvement de ce point matériel.

2. Chocs entre deux particules

Soient deux particules (1) et (2) de masses m_1 et m_2.
Si les deux particules viennent à se rencontrer, on dit qu'il y a collision ou choc entre les deux particules.
Le système constitué par deux particules qui entrent en collision est un système isolé. Au cours d'un choc :

$$\frac{d\overrightarrow{p_1}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{p_2}}{dt} = \overrightarrow{0}$$

soit

$$\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{cste}$$

$\overrightarrow{p_1} = m_1\overrightarrow{v_1}$: vecteur quantité de mouvement de la particule (1) de masse m_1
$\overrightarrow{p_2} = m_2\overrightarrow{v_2}$: vecteur quantité de mouvement de la particule (2) de masse m_2

Le système constitué par deux particules qui entrent en collision est un système isolé.

La conservation de la quantité de mouvement donne :

$$\underbrace{\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}}_{\text{(avant le choc)}} = \underbrace{\overrightarrow{p'_1} + \overrightarrow{p'_2}}_{\text{(après le choc)}}$$

3. Chocs élastiques et chocs inélastiques

Soient deux particules de masse m_1 et m_2, $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ leurs vecteurs vitesse avant le choc et $\overrightarrow{v'_1}$ et $\overrightarrow{v'_2}$ leurs vecteurs vitesse après le choc.

a. Choc élastique

Au cours d'un choc élastique, outre la conservation de la quantité de mouvement, il y a conservation de l'énergie cinétique :

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{cste} \text{ et } \mathcal{E}_c = cste$$

Ainsi :

$$\underbrace{\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2}_{\text{(avant le choc)}} = \underbrace{\frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2}_{\text{(après le choc)}}$$

Soit :

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m'_1} + \frac{p_2'^2}{2m'_2}$$

[IMPORTANT]

- Lorsque les particules après le choc sont identiques aux particules initiales, on a un processus de « diffusion » et on parle alors de **diffusion élastique**.
- Dans le cas de particules chargées, il y a conservation de la charge électrique.

b. Choc inélastique

Au cours d'un choc inélastique, il y a dissipation de l'énergie.

[ATTENTION]

Au cours d'un choc inélastique, il n'y pas conservation de l'énergie cinétique.

c. Choc central élastique

Un choc entre deux particules est dit central ou « de plein fouet » si les vecteurs vitesse avant et après le choc sont des vecteurs colinéaires.

Pour un choc central élastique, on peut écrire :

$$v'_{1x} = \frac{2m_2 v_{2x} + (m_1 - m_2)v_{1x}}{m_1 + m_2} \text{ et } v'_{2x} = \frac{2m_1 v_{1x} - (m_1 - m_2)v_{2x}}{m_1 + m_2}$$

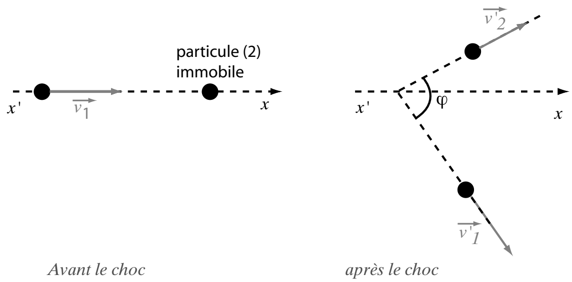
| v_{1x} : vitesse de la particule (1) avant le choc
| v_{2x} : vitesse de la particule (2) avant le choc
| v'_{1x} : vitesse de la particule (1) après le choc
| v'_{2x} : vitesse de la particule (2) après le choc

Cas particuliers :

- Si avant le choc, la particule cible est immobile, soit $v_{2x} = 0$, alors :

$$v'_{1x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1x} \; ; \; v'_{2x} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1x}$$

$$\varphi = (\overrightarrow{v_1'}, \overrightarrow{v_2'}) : \text{angle de diffusion}$$



- Si les deux particules se heurtent avec des vitesses opposées, soit $v_{1x} = -v_{2x}$.

Si, de plus, $m_1 = m_2$, alors :

$$v'_{1x} = v_{2x} = -v_{1x}$$

et

$$v'_{2x} = v_{1x}$$

[Mécanique]
Les oscillateurs mécaniques

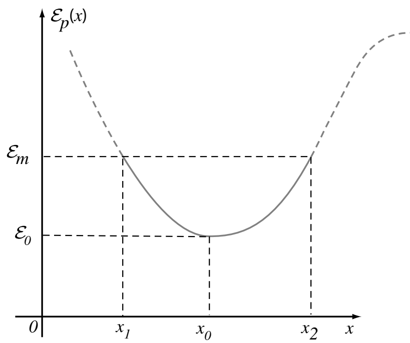
FICHE COURS 5

1. Définitions

a. Qu'est-ce qu'un oscillateur ?

On appelle oscillateur tout système qui effectue des mouvements de va-et-vient autour d'une position d'équilibre stable.
Si $\mathcal{E}_p$ représente l'énergie potentielle du système, son évolution en fonction de la position x peut être donnée par le graphe de la figure ci-dessous :

Un oscillateur est un système écarté de sa position d'équilibre stable. Le système se trouve donc dans une cuvette de potentiel.



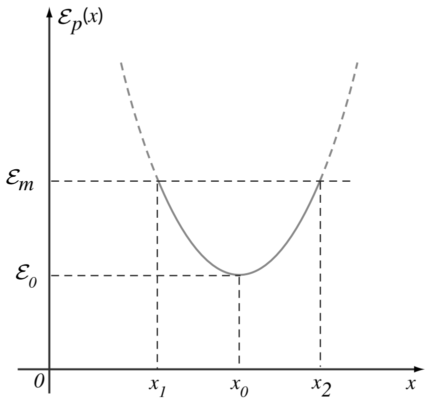
[IMPORTANT]

> Les oscillations sont libres quand, une fois écarté de sa position d'équilibre, l'oscillateur est abandonné à lui-même.

b. L'oscillateur harmonique

L'oscillateur est dit harmonique si sa cuvette de potentiel est parabolique.

La position d'équilibre stable correspond à $x = x_0$.
Ce mouvement n'a pas de branches infinies, puisque x est limité à l'intervalle $[x_1, x_2]$.
Le mouvement de l'oscillateur dans la cuvette de potentiel est donc un mouvement lié.



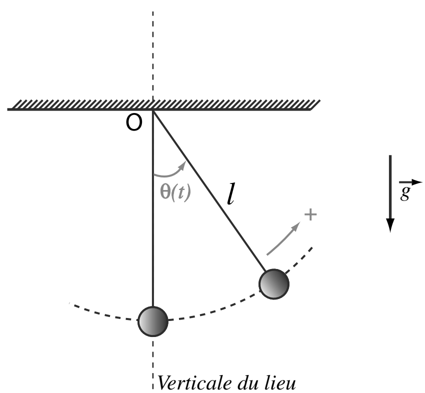
Dans le cas d'un oscillateur mécanique en translation selon un axe $x'Ox$, par exemple, l'énergie potentielle s'écrit donc sous la forme :

$$\mathcal{E}_p(x) = Ax^2 + \mathcal{E}_0 \text{ avec } A = cste > 0$$

c. Les oscillateurs mécaniques d'usage courant

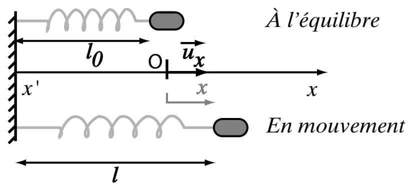
Le pendule simple

La grandeur physique associée à l'oscillateur est l'angle $\theta(t)$ appelé élongation angulaire.
$\theta(t)$ désigne l'écart angulaire entre la position du pendule à l'instant t et celle à l'équilibre.
L'élongation $\theta(t)$ est une grandeur algébrique.



Le pendule élastique

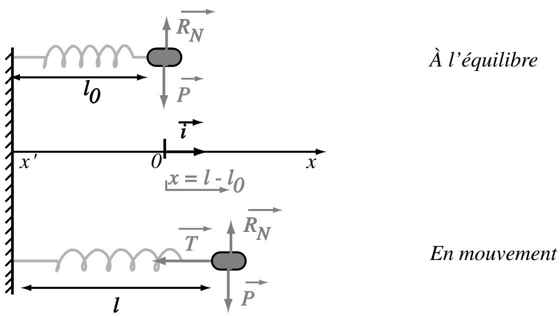
La grandeur physique associée à l'oscillateur est l'élongation $x(t)$. $x(t)$ désigne l'écart entre la position du pendule à l'instant t et celle à l'équilibre.
L'élongation $x(t)$ est une grandeur algébrique.



2. Étude du pendule élastique

a. Étude dynamique

Le système étudié est le solide de masse m et de centre d'inertie G.
On écarte le solide de sa position d'équilibre de $x = a$ puis on le lâche sans vitesse initiale.
Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le système est soumis à trois forces : son poids $\vec{P}$, la réaction normale de l'axe $\vec{R_N}$ et la force de rappel du ressort $\vec{T}$.



À l'équilibre : $\vec{P} + \vec{R_N} = \vec{0}$.

En mouvement : $\vec{P} + \vec{R_N} + \vec{T} = m\vec{a}$

Après projection sur l'axe $x'Ox$, il vient :

$$-kx = m\ddot{x}, \text{ soit } \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Les solutions sont de la forme : $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

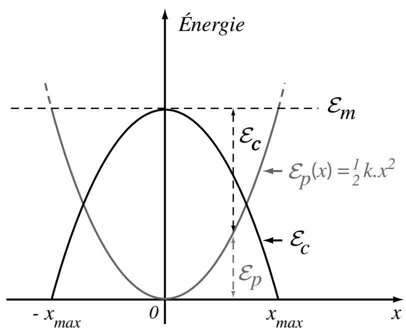
- Les oscillations d'un pendule élastique non amorti sont sinusoïdales (on dit aussi harmoniques).
- La période propre des oscillations est $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.
- T_0 ne dépend que des paramètres mécaniques de l'oscillateur : son inertie (masse m) et la constante k du ressort.

b. Étude énergétique

L'**énergie mécanique du système** est égale à la somme de son énergie potentielle et de son énergie cinétique, soit :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_c \text{ avec } \left| \begin{array}{l} \mathcal{E}_p = \dfrac{1}{2}kx^2 \\ \text{et} \\ \mathcal{E}_c = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 \end{array} \right.$$

Les **transformations énergétiques** $\mathcal{E}_p \leftrightarrows \mathcal{E}_c$ du pendule élastique peuvent être suivies sur les diagrammes ci-contre.



Énoncés

1. Un motard se rend d'une ville A à une ville B à la vitesse moyenne $v_1 = 96\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$
Il revient immédiatement de la ville B à la ville A, en passant par la même route, à la vitesse moyenne $v_2 = 66\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$
Calculer sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours.

❑ **a.** $25\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ❑ **b.** $76\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$
❑ **c.** $78\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ ❑ **d.** $83\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$
❑ **e.** $22\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

2. Un objet tombe en chute libre sans vitesse initiale d'une hauteur h. Cet objet parcourt 9,5 m lors de la dernière seconde de chute.
Donnée :
Intensité du champ de pesanteur supposée constante : $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.
Sa vitesse lorsqu'il atteint le sol est :

❑ **a.** $9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ❑ **b.** $14{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
❑ **c.** $49\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ ❑ **d.** $52\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$
❑ **e.** $54\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

3. Un point matériel M effectue un mouvement dans un plan $(O, \overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$. Les coordonnées x et y du point M varient en fonction du temps selon :

$$\begin{cases} (1)x = 0{,}3\cos(0{,}5\pi t + 4{,}25) \\ (2)y = 0{,}3\sin(0{,}5\pi t + 4{,}25) \end{cases}$$

Toutes les grandeurs sont exprimées dans le système S.I.

❑ **a.** Le point M effectue un mouvement sinusoïdal rectiligne.
❑ **b.** Le point M effectue un mouvement circulaire uniforme.
❑ **c.** La période du mouvement du point M est $T_0 = 0{,}5$ s.

❑ **d.** La période du mouvement du point M est $T_0 = 4$ s.
❑ **e.** La fréquence du mouvement du point M est $f = 0{,}5$ Hz.

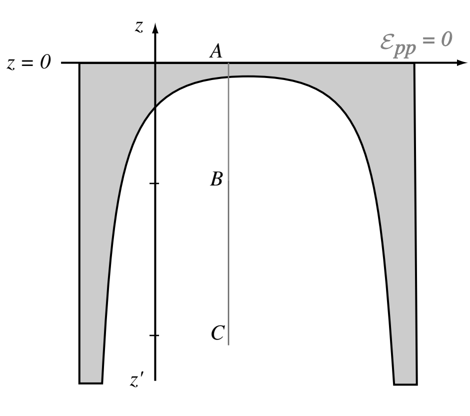
4. Un bombardier chargé de détruire une cible, une usine pétrochimique, vole à l'altitude $h = 2{,}5$ km selon un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse v_0.
En passant à la verticale d'un point H du sol, situé à la distance $d = 2{,}5$ km du centre de l'usine, le bombardier largue une bombe sans vitesse initiale.

Données :
L'édifice de l'usine est un carré de 200 m de côté.
Les forces de frottement avec l'air sont négligeables.
Vitesse du bombardier : $v_0 = 396\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.
Intensité du champ de pesanteur supposée constante : $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

❑ **a.** La cible (centre de l'usine) sera atteinte.
❑ **b.** L'impact se produira à 200 m avant le centre de l'usine.
❑ **c.** L'impact se produira à 2 km après le centre de l'usine.
❑ **d.** L'impact se produira à 15 m avant le centre de l'usine.
❑ **e.** La cible ne sera pas atteinte.

L'énoncé suivant est commun aux questions 5 et 6.

Un sportif de masse $m = 75$ kg effectue un saut à l'élastique en se lançant sans vitesse initiale d'un point A d'un pont situé au dessus d'une vallée (figure ci-après).



L'élastique a une longueur à vide $l_0 = AB = 23$ m et sa masse est négligeable.
On prendra le point A comme origine des altitudes et des énergies potentielles de pesanteur. On négligera les frottements avec l'air.

Donnée : $g = 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

5. La vitesse du sauteur au point B est :

❑ **a.** $12{,}34 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ❑ **b.** $21{,}23 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ❑ **c.** $29{,}40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
❑ **d.** $36{,}05 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ❑ **e.** $4{,}61 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

6. L'énergie mécanique du système {Terre - sauteur - élastique} vaut :

❑ **a.** $-16{,}9 \cdot 10^3$ J ❑ **b.** $-12{,}5 \cdot 10^3$ J ❑ **c.** $+16{,}9 \cdot 10^3$ J
❑ **d.** $0{,}0$ J ❑ **e.** $+22{,}6 \cdot 10^3$ J

L'énoncé suivant est commun aux questions 7 et 8.

Un point matériel M de masse m peut se déplacer sur un axe Ox. En fonction de son abscisse x sur cet axe, l'énergie potentielle de M au voisinage de l'origine est donnée par :

$$\mathcal{E}_p(x) = -V_0(1 - 0{,}2x^2)$$

7. Quelle est l'expression de la force à laquelle est soumis M au voisinage de l'origine ?

❑ **a.** $0{,}4V_0x$ ❑ **b.** $-0{,}4V_0x$ ❑ **c.** $-0{,}2V_0x$
❑ **d.** $-V_0(\frac{1}{x} - 0{,}2x)$ ❑ **e.** $0{,}2V_0x^2$

8. Sous l'effet de cette force, le point M est animé d'un mouvement :

❑ **a.** Rectiligne uniforme

❑ **b.** Uniformément accéléré

❑ **c.** Sinusoïdale de période $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{0{,}4V_0}}$

❑ **d.** Sinusoïdale de période $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}4V_0}{m}}$

❑ **e.** Aucune des propositions précédentes n'est correcte.