Toute la MP en fiches

MATHS. PHYSIQUE. CHIMIE.

2e ÉDITION | D. Fredon • S. Margail • D. Magloire

DUNOD

Crédits photographiques :

Portait de Carl Friedrich Gauss : lithographie de Siegfried Detlev Bendixen, in Astronomische Nachrichten, 1828

Portait de James Clerck Maxwell : Lewis Campbell and William Garnett, The Life of James Clerk Maxwel, 1882.

Portait de Michael Faraday : R. A. Millikan & H. G. Gale, A First Course in Physics, 1906.

Conception et création de couverture : Dominique Raboin

Collaboration technique : Thomas Fredon, ingénieur Télécom Bretagne

11 rue Paul Bert , 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-074877-8

Avant propos

Pour chaque matière proposée dans cet ouvrage (mathématiques, physique, chimie), vous trouverez un résumé de cours pour vous aider dans vos révisions tout au long de l'année et, dans la dernière ligne droite, juste avant vos concours.

Ces résumés sont enrichis - non pas aux omega 3 comme dans la publicité -mais avec des conseils, des méthodes, des mises en garde, et des exercices types pour vous entraîner à manipuler les notions présentées.

Synthèse des programmes, ce livre vous accompagnera avant tout contrôle oral ou écrit. L'ordre de présentation des notions a été pensé en fonction de cet objectif. Ne soyez pas surpris que l'ordre pédagogique de votre cours puisse être différent : l'apprentissage n'est pas un processus linéaire. Mais il est normal que l'ordre pédagogique de votre cours puisse être différent : l'apprentissage n'est pas un processus linéaire.

Grâce au découpage en fiches et à la présence d'un index très détaillé, vous retrouverez facilement, et à tout moment, les notions que vous souhaitez réviser.

Le livre de la même série de première année vous sera utile car, rappelez-vous, le programme des concours que vous passerez porte sur les deux années de classes préparatoires.

Dans chaque des fiches, certaines parties sont mises en valeur par un fond tramé :

– pour mettre en évidence un résultat important,

– avec le pictogramme ✎ (prenez note !) pour des commentaires, remarques, méthodes,

– avec le pictogramme ☞ (Attention, danger !) pour des mises en garde, des erreurs à éviter.

Un résumé de cours n'est pas un cours complet. Pour ceci, rien ne remplace le cours de votre professeur. Vous pouvez aussi consulter le catalogue Dunod, riche de nombreux manuels et ouvrages d'entraînement.

N'hésitez pas à nous communiquer vos critiques, vos propositions d'amélioration, et aussi vos encouragements.

Daniel Fredon
daniel.fredon@laposte.net
mathématiques

Didier Magloire
didier.magloire@orange.fr
physique

Sandrine Margail
sandrine_margail@yahoo.fr
chimie

Un grand merci à Jean-Marie Monier et à Claude Morin pour leurs relectures minutieuses, Matthieu Daniel pour le suivi attentif de la réalisation de ce livre et à Thomas Fredon sans qui ce livre n'existerait pas.

Table des matières

Avant-propos page 3

Mathématiques

Algèbre

1. Compléments sur les groupes page 8
2. Compléments sur les anneaux page 11
3. Réduction des endomorphismes page 17
4. Compléments sur les espaces euclidiens page 23

Analyse

5. Fonctions convexes page 28
6. Topologie des espaces normés page 31
7. Séries numériques et familles sommables page 38
8. Suites et séries de fonctions page 42
9. Séries entières page 47
10. Fonctions vectorielles page 52
11. Intégration sur un intervalle quelconque page 56
12. Équations différentielles linéaires page 61
13. Calcul différentiel page 67

Probabilités

14. Calcul des probabilités page 74
15. Variables aléatoires discrètes page 79
16. Espérance et variance page 83

Corrigés des mathématiques page 88

Physique

Traitement du signal

1. Traitement des signaux analogiques page 126

2. Introduction au traitement numérique du signal page 132
3. Filtrage numérique du signal page 137

Mécanique

4. Référentiels non galiléens 1 : cinématique page 141
5. Référentiels non galiléens 2 : dynamique page 147
6. Complément de mécanique du solide page 151

Électrostatique

7. Distributions de charge et champ électrostatique page 154
8. Propriétés du champ électrostatique page 161
9. Dipôles électriques page 172

Magnétostatique

10. Distributions de charge et champ électrostatique page 178
11. Dipôles magnétiques page 187
12. Les équations de Maxwell page 192
13. Énergie du champ électromagnétique page 205
14. Le champ électromagnétique dans le vide sans charges ni courants électriques page 210
15. Propagation du champ électromagnétique dans un plasma page 216
16. Champ électromagnétique en présence d'un milieu conducteur ohmique page 222
17. Champ de rayonnement dipolaire page 230

Optique

18. Modèle scalaire des ondes lumineuses page 238
19. Sources et détecteurs de lumière page 245
20. Superposition d'ondes lumineuses page 251
21. Interférences par division du front d'onde page 257
22. Interférences par division d'amplitude page 264

Thermodynamique

23. Systèmes ouverts en régime stationnaire page 272
24. Diffusion thermique page 278

Physique quantique

25. Fonctions d'onde et probabilités de présence page 287
26. Puits, marches et barrières de potentiel page 295
27. Thermodynamique statistique page 302

Corrigés de la physique page 312

Chimie

Thermochimie

1. Application du premier principe à la transformation chimique page 343
2. Application du second principe à la transformation chimique page 354

Électrochimie

3. Les courbes intensité-potentiel page 367
4. Phénomènes de corrosion humide page 379
5. Les piles page 393
6. Les électrolyseurs et les accumulateurs page 400
7. Récapitulatif sur les piles et les électrolyseurs page 410

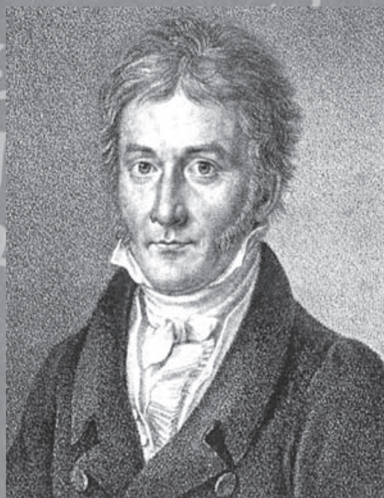
Corrigés de la chimie page 411

Annexes

1. Champs scalaires ; champs vectoriels page 437
2. Séries de Fourier des signaux classiques page 440

Index des mathématiques page 442
Index de la physique page 445
Index de la chimie page 448

Partie 1
Mathématiques



Carl Friedrich Gauss, 1777-1855

Mathématicien, astronome et physicien allemand,
on le surnomme le prince des mathématiciens.
Il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens
de tous les temps.

À côté de lui, vous n'êtes que des gosses !

1 Compléments sur les groupes

1. Structure de groupe

1.1 Définitions

• Un ensemble non vide G, muni d'une loi de composition interne $*$, est un groupe si :
➢ la loi est associative ;
➢ il existe un élément neutre e ;
➢ tout élément de G possède un symétrique dans G.
Si, de plus, la loi est commutative, on dit que le groupe est commutatif, ou abélien.

• Dans un groupe, tout élément est régulier (ou simplifiable), c'est-à-dire que l'on a toujours :

$$x * y = x * z \Longrightarrow y = z \quad ; \quad y * x = z * x \Longrightarrow y = z\,.$$

Généralement, un groupe est noté additivement ou multiplicativement. Le symétrique x' de x est alors noté $-x$ dans le premier cas, x^{-1} dans le second.

• L'**ordre** d'un groupe fini est le nombre de ses éléments.

• Un produit fini de groupes est un groupe.

➤ *Faites l'exercice 1.*

1.2 Sous-groupe

• Une partie stable H d'un groupe G est un sous-groupe de G si la restriction à H de la loi de G y définit une structure de groupe.

• Pour qu'une partie non vide H d'un groupe G soit un sous-groupe de G, il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} \forall x \in H \qquad \forall y \in H \qquad xy \in H\,; \\ \forall x \in H \qquad x^{-1} \in H\,. \end{cases}$$

ou encore :

$$\forall x \in H \qquad \forall y \in H \qquad xy^{-1} \in H\,.$$

• Les sous-groupes du groupe additif $\mathbb{Z}$ sont les ensembles :

$$n\mathbb{Z} = \{nx\ ;\ x \in \mathbb{Z}\} \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

• L'intersection d'une famille de sous-groupes est un sous-groupe de G.

☞ *La réunion de deux sous-groupes de G n'est un sous-groupe de G que si l'un est inclus dans l'autre.*

2. Morphismes de groupes

2.1 Définitions

Soit G et G' deux groupes notés multiplicativement. Une application f, de G dans G', est un morphisme de groupes si, et seulement si :

$$\forall x \in G \qquad \forall y \in G \qquad f(xy) = f(x)\,f(y).$$

Si, de plus, f est bijective, on dit que f est un isomorphisme de groupes. Les deux groupes sont alors isomorphes.

➤ *Faites les exercices 2 et 3.*

2.2 Exemples

• La **signature** qui, à toute permutation σ associe $\varepsilon(\sigma)$ est un morphisme du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ muni de la loi $\circ$ dans le groupe $\{-1, 1\}$ muni de la loi $\times$.

• Le **déterminant** est un morphisme du groupe $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ dans $(\mathbb{K}^\star, \times)$.

2.3 Composition

Le composé de deux morphismes (resp. isomorphismes) de groupes est un morphisme (resp. isomorphisme) de groupes.

2.4 Images de sous-groupes

Soit G et G' deux groupes notés multiplicativement et f un morphisme de G dans G'. On a :

H sous-groupe de $G \Longrightarrow f(H)$ sous-groupe de G'.

H' sous-groupe de $G' \Longrightarrow f^{-1}(H')$ sous-groupe de G.

2.5 Noyau et image d'un morphisme

Soit G et G' deux groupes notés multiplicativement, d'éléments neutres respectifs e et e', et f un morphisme de G dans G'. On a :

$$e' = f(e) \qquad ; \qquad f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}.$$

• $f(G)$ est un sous-groupe de G' appelé image de f et noté $\operatorname{Im} f$.

• $N = f^{-1}(\{e'\}) = \{x \ ; \ x \in G\ , \ f(x) = e'\}$ est un sous-groupe de G que l'on appelle le noyau du morphisme f. On le note $\operatorname{Ker} f$.

f est injectif si, et seulement si, $\operatorname{Ker} f = \{e\}$.

Exemple

Si on considère le morphisme *déterminant* appliqué au groupe orthogonal $O(E)$, son noyau est l'ensemble des matrices orthogonales A telles que $\det A = 1$. Il s'agit donc du groupe spécial orthogonal.

3. Sous-groupe engendré

3.1 Sous-groupe engendré par une partie

• Toute intersection de sous-groupes de G est un sous-groupe de G.

• L'intersection de la famille des sous-groupes de G contenant une partie A donnée est un sous-groupe de G appelé sous-groupe engendré par A.
C'est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-groupe contenant A.

• Le sous-groupe engendré par A est l'ensemble des composés d'éléments de A et d'inverses d'éléments de A.

3.2 Groupe monogène

• Si un groupe G est engendré par un seul élément a, il est dit monogène. On dit que a est un générateur de G.

• Le groupe G est alors commutatif. Il est de la forme :

$G = \{pa \; ; \; p \in \mathbb{Z}\}$ en notation additive,

$G = \{a^p \; ; \; p \in \mathbb{Z}\}$ en notation multiplicative.

• L'application, de $\mathbb{Z}$ dans G, $p \mapsto pa$ en notation additive,
$p \mapsto a^p$ en notation multiplicative, est un morphisme de groupes.

3.3 Groupe cyclique

Tout groupe monogène est isomorphe :

➢ à $(\mathbb{Z}, +)$ s'il est infini,

➢ à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ s'il est d'ordre n, ou à $(U_n, \times)$ (groupe des racines n^e de l'unité).
Dans ce cas, on dit que G est un **groupe cyclique** d'ordre n.

Les générateurs de U_n sont les nombres complexes $u_k = (u_1)^k$ tels que k soit premier avec n.

3.4 Théorème de Lagrange

Dans un groupe fini, l'ordre de tout sous-groupe est un diviseur de l'ordre du groupe.

3.5 Ordre d'un élément

• Dans un groupe, on appelle ordre d'un élément x l'ordre du sous-groupe engendré par cet élément. Si le sous-groupe engendré est infini, on dit que x est d'ordre infini.

• Si x est d'ordre fini d et si e désigne l'élément neutre de G, alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad x^n = e \iff d | n$$

• L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.

➤ *Faites l'exercice 4.*

Sauriez-vous répondre ?

Exercice 1 : Montrez qu'un groupe non commutatif contient au moins 6 éléments distincts.

Exercice 2 : Montrez que $\mathbb{R}$ muni de la loi $*$ définie par :

$$x * y = \sqrt[2015]{x^{2015} + y^{2015}}$$

est isomorphe à $\mathbb{R}$ muni de l'addition.

Exercice 3 : Montrez que $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}^2, +)$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 4 : Montrez que tout groupe G d'ordre premier est cyclique.

2 Compléments sur les anneaux

1. Structure d'anneau

1.1 Définitions

• Anneau

Un ensemble A, muni d'une loi notée + (dite addition) et d'une loi notée × (dite multiplication), possède une structure d'anneau pour ces opérations si :

➢ A possède une structure de groupe commutatif pour l'addition ;

➢ la multiplication est associative et possède un élément neutre 1_A ;

➢ la multiplication est distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition.

Si la multiplication est commutative, l'anneau est dit commutatif.

• Sous-anneau

On dit qu'une partie B d'un anneau A, stable pour + et ×, est un sous-anneau de A, si la restriction à B des deux lois de A y définit une structure d'anneau, avec le même élément neutre pour × que dans A.

Pour qu'une partie B d'un anneau A soit un sous-anneau de A, il faut et il suffit que $1_A \in B$ et :

$$\forall x \in B \quad \forall y \in B \qquad x - y \in B \quad \text{et} \quad xy \in B\,.$$

1.2 Morphismes d'anneaux

• Définitions

A et B étant deux anneaux, une application f, de A dans B, est un morphisme d'anneaux si l'on a toujours :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \ ;\ f(xy) = f(x)\,f(y) \ ;\ f(1_A) = 1_B.$$

• Vocabulaire

Un morphisme f de A dans B est

➢ un isomorphisme si f est bijectif,

➢ un endomorphisme si $A = B$,

➢ un automorphisme si $A = B$ et f bijectif.

• Noyau et image d'un morphisme

➢ $f(A)$ est un sous-anneau de B appelé image de f et noté $\operatorname{Im} f$.

➢ $N = f^{-1}(\{0_B\}) = \{x\ ;\ x \in A\ ,\ f(x) = 0_B\}$ est un sous-anneau de A que l'on appelle le noyau du morphisme f. On le note $\operatorname{Ker} f$.

f est injectif si, et seulement si, $\operatorname{Ker} f = \{0_A\}$.

1.3 Anneau intègre

• **Définition**

Lorsqu'il existe, dans un anneau, des éléments a et b tels que :

$$a \neq 0 \quad \text{et} \quad b \neq 0 \quad \text{et} \quad ab = 0,$$

on dit que a et b sont des **diviseurs de zéro.**

Un anneau **intègre** est un anneau commutatif, non réduit à $\{0\}$, et sans diviseur de zéro.

Pour qu'un anneau commutatif, non réduit à $\{0\}$, soit intègre, il faut et il suffit que tout élément non nul soit simplifiable pour la multiplication.

➤ *Faites l'exercice 1.*

1.4 Corps et sous-corps

• Un corps est un anneau non réduit à $\{0\}$ dont tous les éléments, sauf 0, sont inversibles. On le suppose commutatif.

• On dit qu'une partie L d'un corps $\mathbb{K}$, stable pour $+$ et $\times$, est un sous-corps de $\mathbb{K}$, si la restriction à L des deux lois de $\mathbb{K}$ y définit une structure de corps, c'est-à-dire si c'est un sous-anneau, et si l'inverse d'un élément non nul de L reste dans L.

2. Idéaux d'un anneau commutatif

2.1 Définition et exemples

• Soit A un anneau commutatif. Une partie I de A est un idéal si I est un sous-groupe de $(A, +)$ et si, pour tout $x \in I$ et tout $a \in A$, on a $xa \in I$.

• L'intersection $I \cap J$ et la somme $I + J$ de deux idéaux sont des idéaux.

• Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal.

➤ *Faites l'exercice 2.*

2.2 Divisibilité dans un anneau commutatif intègre

• **Idéaux de $\mathbb{Z}$**

Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

• **Divisibilité**

Soit A un anneau commutatif intègre. On dit que a divise b, et on note $a|b$, si :

$$a|b \iff [\exists\, c \in A \quad b = ac] \iff bA \subset aA.$$

3. Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

3.1 Congruences dans $\mathbb{Z}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La relation binaire dans $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} a \,\mathcal{R}\, b \quad &\iff \quad a \text{ et } b \text{ ont le même reste dans la division par } n \\ &\iff \quad n/(a-b) \end{aligned}$$

est une relation d'équivalence.

On la note $a \equiv b \pmod n$; lire : a congru à b modulo n.

On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence

$$\overline{a} = \{b \in \mathbb{Z} \ ; a \equiv b \pmod n\}.$$

3.2 Propriétés algébriques de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

• Structure

Pour $n \geqslant 2$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ muni des deux lois :

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} \ ; \ \overline{a} \times \overline{b} = \overline{a \times b}$$

est un anneau commutatif.

• Éléments inversibles

Un élément $\overline{a}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible si, et seulement si, a et n sont premiers entre eux.

• Cas particulier

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si, et seulement si, n est premier.

3.3 Indicatrice d'Euler

• Définition

C'est le nombre $\varphi(n)$ des entiers compris entre 1 et n et premiers avec n.

• Cas particulier

Si n est premier, alors $\varphi(n) = n - 1$.

• Calcul de $\varphi(n)$

À partir de la décomposition en facteurs premiers de n : $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i}$, on obtient :

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{r} (p_i - 1)\, p_i^{k_i - 1} = n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

• Propriété

$\varphi(n)$ est l'ordre du groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

• Théorème d'Euler

Si a et n sont premiers entre eux avec $n \geqslant 2$, on a :

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n.$$

✎ *En cryptologie, le code RSA se fonde sur le théorème d'Euler.*

➤ *Faites les exercices 3 et 4.*

3.4 Autres théorèmes

• Théorème chinois

➢ Premier énoncé

Si m et n sont premiers entre eux, $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

➢ Application aux systèmes de congruences

Soit p et q des entiers premiers entre eux. Pour tous entiers a et b, le système d'inconnue x :

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod p \\ x \equiv b \pmod q \end{cases}$$

admet des solutions entières.

☞ *Les chinois de la Haute Antiquité utilisaient ce théorème en astronomie, d'où son nom.*

• Petit théorème de Fermat

Soit p un nombre premier. Pour tout entier a, on a :

$$a^p \equiv a \pmod p.$$

4. L'anneau $\mathbb{K}[X]$

On suppose ici que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

4.1 Idéaux de $\mathbb{K}[X]$

$\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal, c'est-à-dire que tout idéal est principal.

Cela signifie que, si I est un idéal non réduit à $\{0\}$, il existe un polynôme unitaire unique P tel que $I = P\,\mathbb{K}[X]$. On dit que P engendre I.

4.2 pgcd

• Définition

Soit A et B deux polynômes non nuls de $K[X]$. L'ensemble des polynômes unitaires qui divisent à la fois A et B admet un plus grand élément pour la relation d'ordre associée à la divisibilité.

C'est le plus grand commun diviseur de A et de B. On le note $\text{PGCD}\,(A, B)$, ou $A \wedge B$.

Il s'agit du générateur unitaire de l'idéal $A\,\mathbb{K}[X] + B\,\mathbb{K}[X]$.

• Algorithme d'Euclide

Si Q_1 et R_1 sont le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B, on a :

$$A \wedge B = B \wedge R_1\ .$$

On recommence avec B et R_1 . Le dernier reste non nul (normalisé) de ce processus est le PGCD de A et de B.

• Polynômes premiers entre eux

Si $\text{PGCD}\,(A, B) = 1$, on dit que A et B sont premiers entre eux.

4.3 ppcm

• Définition

Soit A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$. L'ensemble des polynômes unitaires qui sont multiples à la fois de A et de B admet un plus petit élément pour la relation d'ordre associée à la divisibilité.

C'est le plus petit commun multiple de A et de B. On le note $\text{PPCM}\,(A, B)$, ou $A \vee B$.

Il s'agit du générateur unitaire de l'idéal $A\,\mathbb{K}[X] \cap B\,\mathbb{K}[X]$.

• **Théorème**

Si A et B sont unitaires, on a :

$$\text{PGCD}\,(A,B) \times \text{PPCM}\,(A,B) = A\,B\,.$$

4.4 Théorèmes

• **Théorème de Bézout**

Pour que deux polynômes A et B de $\mathbb{K}[X]$ soient premiers entre eux, il faut et il suffit qu'il existe deux polynômes U et V de $\mathbb{K}[X]$ tels que :

$$A\,U + B\,V = 1\,.$$

Si A et B sont premiers entre eux et non tous deux constants, il existe des polynômes U_0 et V_0 de $\mathbb{K}[X]$ uniques tels que :

$$A\,U_0 + B\,V_0 = 1 \quad \text{avec} \quad d^\circ U_0 < d^\circ B \quad \text{et} \quad d^\circ V_0 < d^\circ A\,.$$

• **Théorème de Gauss**

Si A, B et C sont trois polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que A divise $B\,C$, et A premier avec B, alors A divise C.

4.5 Décomposition d'un polynôme

• Tout polynôme de degré $\geqslant 1$ se factorise en un produit d'un élément de $\mathbb{K}^*$ et de polynômes irréductibles unitaires.

Cette décomposition est unique, à l'ordre près.

• Dans $\mathbb{C}[X]$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1.

Dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1, et les polynômes $aX^2 + bX + c$ avec $b^2 - 4ac < 0$.

• Si $P \in \mathbb{R}[X]$, on peut le considérer dans $\mathbb{C}[X]$, et si α est un zéro non réel de P, alors P admet aussi le conjugué $\overline{\alpha}$ pour zéro, avec le même ordre de multiplicité que α.

➤ *Faites l'exercice 5.*

5. Structure d'algèbre

5.1 Définition

On dit qu'un ensemble E est une algèbre sur un corps K, ou K-algèbre, s'il est muni de deux lois internes, notées $+$ et $\times$, et d'une loi externe sur K, notée . , avec les propriétés :

- $(E, +, .)$ est un K-espace vectoriel,
- $(E, +, \times)$ est un anneau.
- $\forall \lambda \in K \quad \forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \lambda\,(x\,y) = (\lambda\,x)\,y = x\,(\lambda\,y)\,.$

$\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ sont des algèbres sur $\mathbb{K}$.

5.2 Sous-algèbre

Une partie d'une algèbre, stable pour les trois lois, est une sous-algèbre si elle possède une structure d'algèbre pour la restriction des lois de l'algèbre, c'est-à-dire si c'est à la fois un sous-espace vectoriel et un sous-anneau.

5.3 Morphisme d'algèbre

E et F étant deux algèbres, une application f, de E dans F, est un morphisme d'algèbre si elle transporte les trois lois, c'est-à-dire si l'on a toujours :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad ; \quad f(xy) = f(x)f(y) \quad ; \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)\,.$$

et si $f(1_E) = 1_F$.

Sauriez-vous répondre ?

Exercice 1 : Soit x un élément d'un anneau intègre A.
Démontrez que si x est inversible à droite, alors x est inversible à gauche.

Exercice 2 : Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A. On appelle radical de I, et on note $\sqrt{I}$, l'ensemble des $x \in A$ pour lesquels il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n \in I$.

Démontrez que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.

Exercice 3 : Combien y a-t-il d'éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/4725\mathbb{Z}$?

Exercice 4 : Montrez que, pour tout entier $n \geqslant 3$, $\varphi(n)$ est un nombre pair.

Exercice 5 : Soit $P = X^4 - 4X^3 + 16X - 16$.
Déterminez le PGCD de P et de P'.
Déduisez-en la factorisation de P en polynômes irréductibles.

3 Réduction des endomorphismes

1. Éléments propres

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1.1 Généralités

• Un sous-espace F de E est stable par u quand $u(F) \subset F$.
En restreignant à la fois le départ et l'arrivée, on définit l'**endomorphisme induit** :

$$u_F \left\{ \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \mapsto & u(x) \end{array} \right.$$

• Soit F un sous-espace et considérons une base adaptée à F, c'est-à-dire une base de F complétée pour avoir une base de E.

La matrice de u dans une telle base peut s'écrire par blocs : $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

Dans ce cas, F est stable par u si, et seulement si, $C = 0$. La matrice de l'endomorphisme induit u_F est alors A.

☞ *Un sous-espace stable ne possède pas toujours de supplémentaire stable.*

• Si u et v commutent, le noyau et l'image de u sont stables par v.

➤ *Faites l'exercice 1.*

1.2 Éléments propres d'un endomorphisme

• Un vecteur non nul $x \in E$ est un vecteur propre de u s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda\, x$. Le scalaire λ est la valeur propre associée à x.

• Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u s'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda\, x$. Le vecteur x est un vecteur propre associé à λ.

• L'ensemble $E_\lambda = \{x \in E \ ; \ u(x) = \lambda\, x\} = \operatorname{Ker}\left(u - \lambda \operatorname{Id}_E\right)$ est le sous-espace propre associé à λ .

• Si E est de dimension finie, le spectre de u est l'ensemble $S_p(u)$ des valeurs propres de u.

1.3 Éléments propres d'une matrice carrée

• Une matrice colonne non nulle X est un vecteur propre de A s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AX = \lambda\, X$. Le scalaire λ est la valeur propre associée à X.

• Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A s'il existe une matrice colonne non nulle X telle que $AX = \lambda\, X$. Le vecteur colonne X est un vecteur propre associé à λ.

• L'ensemble $E_\lambda = \{X \ ; \ AX = \lambda\, X\}$ est le sous-espace propre associé à λ .

• Le spectre de A est l'ensemble $S_p(A)$ des valeurs propres de A.

1.4 Propriétés

• λ est une valeur propre de u si, et seulement si, $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$.

En particulier, 0 est valeur propre de u si, et seulement si, $\mathrm{Ker}\,u \neq \{0\}$, soit u non injectif.

• Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres toutes distinctes, est libre.

• La somme de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.

☞ *Attention, en général* $E \neq \bigoplus_k E_{\lambda_k}$. *Par exemple, si* $u^2 = 0$ *avec* $u \neq 0$, *alors* 0 *est la seule valeur propre possible et pourtant* $E \neq \mathrm{Ker}\,u$.

• Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre pour l'un est stable par l'autre.

1.5 Polynôme caractéristique

Soit E de dimension finie et A une matrice carrée représentant un endomorphisme u dans une base fixée.

• **Définitions**

Le polynôme $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda\, I - A)$ est le polynôme caractéristique de A.

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, ce qui permet de définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

Les zéros de χ_A sont les valeurs propres de A. Si λ est racine d'ordre m_λ de χ_A, on dit que λ est valeur propre d'ordre m_λ.

On a toujours $\boxed{1 \leqslant m_\lambda \leqslant \dim(E_\lambda)}$ où E_λ est l'espace propre associé.

• **Cas où χ_A est scindé**

On a alors :

$$\boxed{\mathrm{tr}\,A = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\det A = (-)^n \prod_{k=1}^{n} \lambda_k\ .}$$

• Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit u_F divise le polynôme caractéristique de u.

➤ *Faites l'exercice 2.*

2. Diagonalisation

Soit E de dimension finie.

2.1 Définitions

• Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale, c'est-à-dire s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

• Une matrice carrée A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale D, c'est-à-dire si elle s'écrit :

$$A = PDP^{-1}$$

où P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à une base de vecteurs propres de A.

2.2 Condition suffisante

Si $\dim E = n$ et si u a n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.

2.3 Conditions nécessaires et suffisantes

u diagonalisable

$\iff$ E est somme directe des sous-espaces propres ;

$\iff$ E admet une base de vecteurs propres ;

$\iff$ le polynôme caractéristique de u est scindé et, pour toute valeur propre λ_k d'ordre m_k, on a :

$$\dim(E_{\lambda_k}) = m_k\ .$$

2.4 Application au calcul de A^m

Si A est diagonalisable, il existe une matrice de passage P telle que $A = PDP^{-1}$. On a alors $A^m = PD^mP^{-1}$.

Et si $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ alors $D^m = \operatorname{diag}(\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m)$.

3. Trigonalisation

3.1 Définition

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Une matrice carrée A est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

3.2 Théorème

Un endomorphisme u est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.

☞ *En particulier, tout endomorphisme est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.*

Les éléments diagonaux de la matrice triangulaire représentant u sont les valeurs propres de u.

3.3 Endomorphismes nilpotents

• Un endomorphisme u est nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$.

• Le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant cette propriété est appelé indice de nilpotence de l'endomorphisme u.

Cet indice est majoré par la dimension de E.

• Les définitions sont analogues pour les matrices.

4. Polynôme d'un endomorphisme

4.1 Définition

Étant donnés un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et un polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, on note $P(u)$ l'endomorphisme de E défini par :

$$P(u) = a_0 \,\mathrm{Id}_E + a_1 u + \cdots + a_p u^p \,.$$

☞ *N'oubliez pas le terme* Id_E.

4.2 Propriétés algébriques

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{K}[X]$, $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$(P+Q)(u) = P(u) + Q(u) \quad ; \quad (\lambda P)(u) = \lambda P(u) \quad ;$$
$$(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u) \,.$$

Cette dernière relation entraîne que tous les polynômes d'un même endomorphisme commutent entre eux.

On peut dire aussi que, pour u donné, l'application $P \mapsto P(u)$ est un morphisme de l'algèbre $\mathbb{K}[X]$ dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.

Ce morphisme n'est pas surjectif puisque $\mathcal{L}(E)$ n'est pas commutatif.

4.3 Stabilité

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Im}\, P(u)$ et $\mathrm{Ker}\, P(u)$ sont stables par u.

4.4 Propriété des valeurs propres

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, si λ est une valeur propre de u, alors $\mathbb{P}(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$.

4.5 Théorème de décomposition des noyaux

Soit $P_1, \ldots, P_r$ des éléments de $\mathbb{K}[X]$, deux à deux premiers entre eux, de produit égal à P, alors :

$$\mathrm{Ker}(\,P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(\,P_i(u)).$$

5 Polynôme annulateur

5.1 Définition

On dit que P est un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0$.

5.2 Polynôme minimal

• L'ensemble des polynômes annulateurs de u, c'est-à-dire le noyau du morphisme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \mapsto & P(u) \end{array}$$

est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. L'unique polynôme normalisé qui engendre cet idéal est le polynôme minimal de u.

• Ce morphisme a pour image la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathcal{L}(E)$.

• Si d est le degré du polynôme minimal, alors la famille $(u^k)_{0\leqslant k\leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

5.3 Polynôme annulateur et diagonalisabilité

u est diagonalisable si, et seulement si, il existe un polynôme scindé, annulateur de u, dont toutes les racines sont simples.

5.4 Théorème de Cayley-Hamilton

• **Théorème**

Si E est de dimension finie, le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u.

Le polynôme minimal de u divise donc le polynôme caractéristique de u.

• **Application au calcul de** A^m

Si P est un polynôme annulateur de A, la division euclidienne

$$X^m = P(X)\,Q_m(X) + R_m(X)$$

entraîne $\quad A^m = R_m(A)$.

☞ *Cette méthode reste valable même si A n'est pas diagonalisable.*

5.5 Endomorphisme à polynôme minimal scindé

S'il existe un polynôme scindé annulant u, on peut décomposer E en somme directe de sous-espaces stables par u et tels que, sur chacun, u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

➤ *Faites les exercices 3, 4, 5 et 6.*

Sauriez-vous répondre ?

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u = 0$.

1. Montrez que l'endomorphisme v induit par u sur $\mathrm{Im}\,(u)$ est un isomorphisme.

2. Démontrez que la dimension de $\mathrm{Im}\,(u)$ est paire.

Exercice 2 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = g$.

1. Montrez que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad f \circ g^k - g^k \circ f = kg^k$$

2. En considérant l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_f : & \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ & h & \mapsto & f \circ h - h \circ f \end{array}$$

démontrez qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^p = 0$.

Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f_1, f_2, f_3 trois endomorphismes de E vérifiant :

$$f_1 + f_2 + f_3 = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad f_i \circ f_j = 0 \text{ pour tous } i \neq j$$

Montrez que $g = f_1 + f_2 - 2f_3$ est diagonalisable.

Exercice 4 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I$. Démontrez que $\det A > 0$.

Exercice 5 : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminez A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable. Montrez que l'endomorphisme φ :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ g & \mapsto & \varphi(g) = f \circ g \end{array}$$

est diagonalisable.