

Georges Henriot



ENGRENAGES

Conception • fabrication
• mise en œuvre

Préface de

Jacques Boisset

Président de l'Union nationale
des industries de transmissions mécaniques

8^e édition

DUNOD

Les premières éditions de cet ouvrage sont parues sous le titre
Traité théorique et pratique des engrenages, tomes 1 et 2

6^e édition © Bordas, Paris, 1979 pour le tome 1

5^e édition © Bordas, Paris, 1983 pour le tome 2

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



Nouvelle présentation 2013

© Dunod, Paris, 1999, 2007

ISBN 978-2-10-059993-6

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Préface

Préfacer la huitième édition de ce traité technique à l'origine en deux tomes est un redoutable honneur.

D'abord parce que le livre en question doit être un ouvrage indispensable pour justifier un intérêt si constant, ensuite parce que l'auteur et ses préfaciers sont des personnages très importants. Quant à l'objet de l'ouvrage, en tant qu'engrenagiste et fabricant de réducteurs et multiplicateurs, je suis obligé de confesser que c'est un sujet passionnant et fondamental.

L'auteur, Monsieur Georges Henriot, est un des pères fondateurs mondiaux de la théorie de l'engrenage. Il a été reconnu sur tous les continents, comme un de ceux qui ont permis la vulgarisation claire et simple de la technologie et sa mise à la portée du plus grand nombre. À ce titre, il a même reçu le prix spécial de la fondation allemande Sew Blickle décerné aux personnes ayant le plus contribué au développement de l'industrie de l'engrenage. Il est très significatif aussi que le Recteur Capelle, lui qui fut à l'origine des Instituts d'enseignement supérieur, ait été son premier préfacier. La contribution de Monsieur Henriot est immense en tant que somme la plus complète et la plus accessible du savoir nécessaire pour calculer, fabriquer, construire des engrenages ou des ensembles à la base d'engrenages.

Bien sûr, son passage chez Maag lui a donné l'accès aux clés du temple, mais c'est son expérience, pratique d'ingénieur des Arts et Métiers, à la SEIE et d'industriel chez Citroën, Messian, Durand, qui a donné à son ouvrage cet aspect simple, direct et pratique qui en fait son succès. Tous les bureaux d'études de mécanique disposent de ce traité. Il existe même encore de très grandes sociétés comme EDF qui font toujours systématiquement référence à la méthode Henriot. C'est dire si ses calculs sont fiables.

Au moment où les filières scientifiques n'attirent curieusement plus autant de jeunes, nous nous apercevons tous les jours que l'existence de ces traités complets dans une technique évolutive est un outil précieux indispensable pour les ingénieurs et techniciens de l'engrenage.

Et nous sommes bien là au cœur de la mécanique ; l'engrenage n'est-il pas le symbole le plus fréquent des entreprises ou associations opérant dans la mécanique ?

Dans ce métier du calcul et de la conception des engrenages où personne n'aboutit exactement à la même solution, où la détermination du module, du nombre de dents, du déport de denture, de l'hélice, de la largeur de la denture, des traitements thermiques, confine à l'art, le recours à un ouvrage tel que celui-ci permettra aux jeunes de mieux comprendre les paroles de Monsieur

Naegli, grand spécialiste des calculs chez Maag : « de même que vous ne confiez pas vos dents à n'importe quel dentiste, ne confiez pas vos dentures à qui que ce soit autre qu'un véritable engrenagiste ».

Ainsi, les mécaniciens pourront se référer à votre bible. Les linguistes ont le Larousse, nous autres mécaniciens nous avons le Henriot.

Et que vive l'involute !

Jacques Boisset
Président de l'Unitram
Union nationale des industries
de transmissions mécaniques

Table des matières

Avant-propos

XXI

A

Conception des engrenages

| | |
|--|-----------|
| 1 • Rappel des notions fondamentales | 3 |
| 1.1 Théorie élémentaire sur les vecteurs | 3 |
| 1.1.1 Composition des forces, 3 | |
| 1.1.2 Rappel sur les moments, 5 | |
| 1.1.3 Systèmes de forces équivalents, 7 | |
| 1.2 Vitesses et composition des vitesses | 7 |
| 1.2.1 Mouvements fondamentaux, 8 | |
| 1.2.2 Composition des mouvements : mouvement relatif, mouvement d'entraînement, mouvement absolu, 11 | |
| 1.3 Mouvement d'un plan sur un plan fixe | 15 |
| 1.3.1 Centre instantané de rotation, 15 | |
| 1.3.2 Base et roulante du mouvement, 16 | |
| 1.3.3 Exemple d'application des propriétés du centre instantané de rotation, 18 | |
| 1.3.4 Formule et construction d'Euler-Savary, 19 | |
| 2 • Surfaces primitives et surfaces de denture | 24 |
| 2.1 Surfaces primitives | 24 |
| 2.1.1 Engrenages parallèles, 24 | |
| 2.1.2 Engrenages concourants, 27 | |
| 2.1.3 Engrenages gauches, 31 | |
| 2.2 Surfaces de denture | 31 |
| 2.2.1 Engrenages parallèles, 32 | |
| 2.2.2 Engrenage concourants, 89 | |

| | |
|---|------------|
| 3 • Étude de l'engrènement des engrenages parallèles | 116 |
| 3.1 Continuité d'engrènement | 116 |
| 3.1.1 Engrenages parallèles extérieurs, à denture droite, 116 | |
| 3.1.2 Denture intérieure droite, 125 | |
| 3.1.3 Denture hélicoïdale. Rapport de recouvrement. Rapport total de conduite, 127 | |
| 3.2 Interférences | 134 |
| 3.2.1 Engrenages parallèles extérieurs, 134 | |
| 3.2.2 Engrenages parallèles intérieurs, 146 | |
| 3.3 Glissement | 155 |
| 3.3.1 Généralités, 155 | |
| 3.3.2 Glissement relatif total de deux profils conjugués depuis le début jusqu'à la fin de l'action, 159 | |
| 3.3.3 Glissement spécifique, 161 | |
| 4 • Corrections de denture | 169 |
| 4.1 Mécanisme géométrique des corrections de denture | 169 |
| 4.1.1 Définitions, 169 | |
| 4.1.2 Dentures déportées sans variation d'entraxe, 172 | |
| 4.1.3 Dentures déportées avec variation d'entraxe, 177 | |
| 4.2 Utilisation des dentures déportées pour éviter les interférences | 194 |
| 4.2.1 Engrenage parallèle, extérieur, à denture droite, 194 | |
| 4.2.2 Engrenages à denture hélicoïdale, 197 | |
| 4.3 Équilibrage du glissement spécifique maximum sur le pignon et la roue aux points extrêmes de contact | 197 |
| 4.3.1 Généralités, 197 | |
| 4.3.2 Détermination des déports, 199 | |
| 4.4 Propositions ISO | 201 |
| 4.4.1 Diagramme, 201 | |
| 4.4.2 Choix des déports x_1 et x_2 , 201 | |
| 4.5 Influence des déports sur la géométrie des dentures | 203 |
| 4.6 Engrenages multiplicateurs | 204 |
| 4.7 Dentures hélicoïdales | 205 |
| 4.8 Dentures intérieures | 206 |
| 5 • Engrenages gauches : étude générale | 214 |
| 5.1 Engrenages gauches hélicoïdaux | 214 |
| 5.1.1 Généralités, 214 | |
| 5.1.2 Glissement relatif des dentures conjuguées, 220 | |

| | | |
|------------|---|------------|
| 5.1.3 | Corrections de denture, 222 | |
| 5.1.4 | Calcul des éléments d'un engrenage gauche hélicoïdal, 222 | |
| 5.2 | Engrenages à vis sans fin | 226 |
| 5.2.1 | « Surfaces primitives », 226 | |
| 5.2.2 | Formes de filets de vis, 228 | |
| 5.2.3 | Relations géométriques entre les éléments des dentures, 232 | |
| 5.2.4 | Vis à filet trapézoïdal ZA, 233 | |
| 5.2.5 | Vis en hélicoïde développable ZI, 243 | |
| 5.2.6 | Comparaison des différents types de filets de vis, 247 | |
| 5.2.7 | Étude technologique de l'engrenage à vis sans fin (proportions normales), 249 | |
| 5.2.8 | Zone de portée sur la roue et la vis, 254 | |
| 5.2.9 | Influence des déports. Fonctionnement en « retraite », 256 | |
| 5.2.10 | Engrenage à vis sans fin à pas différentiels (vis duplex), 263 | |
| 5.2.11 | Engrenages à vis globique, 266 | |
| 5.3 | Engrenage « hypoïd » (appellation Gleason) | 271 |
| 5.4 | Engrenage de champ ou Face-Gear | 273 |
| 5.5 | Engrenage spiroïd et helicon | 278 |
| 6 • | Étude dynamique | 281 |
| 6.1 | Unités adoptées | 281 |
| 6.2 | Efforts sur les dentures, les arbres et les paliers | 281 |
| 6.2.1 | Engrenages parallèles à denture droite, 281 | |
| 6.2.2 | Engrenages parallèles à denture hélicoïdale, 285 | |
| 6.2.3 | Engrenages concourants à denture droite, 287 | |
| 6.2.4 | Engrenages concourants à denture hélicoïdale ou spirale, 290 | |
| 6.2.5 | Engrenages à vis sans fin, 293 | |
| 7 • | Calcul des dentures des engrenages parallèles | 299 |
| | INTRODUCTION : CONTRAINTES DE BASE | 299 |
| 7.1 | Pression superficielle | 299 |
| 7.1.1 | Denture droite extérieure, 299 | |
| 7.1.2 | Denture droite intérieure, 303 | |
| 7.1.3 | Denture extérieure hélicoïdale, 305 | |
| 7.1.4 | Formule de base (méthode B), 308 | |
| 7.2 | Résistance à la rupture | 314 |
| 7.2.1 | Facteur de forme : méthode ISO, 316 | |
| 7.2.2 | Facteur de conduite : Y_e , 325 | |
| 7.2.3 | Facteur d'inclinaison : Y_{β} , 327 | |

| | |
|--|------------|
| 7.2.4 Facteur de concentration de contrainte : Y_{Sa} | 327 |
| 7.2.5 Formule de base ISO | 328 |
| FACTEURS GÉNÉRAUX D'INFLUENCE | 330 |
| 7.3 Méthode A | 330 |
| 7.4 Méthodes B, C (D, E) | 330 |
| 7.5 Force tangentielle, couple, puissance | 331 |
| 7.6 Facteur d'application : K_A | 331 |
| 7.6.1 Méthode B | 331 |
| 7.6.2 Méthode C | 331 |
| 7.7 Facteur dynamique : K_V | 333 |
| 7.7.1 Détermination du facteur $K_{V \cdot Br}$ | 333 |
| 7.7.2 Détermination du facteur $K_{V \cdot Cr}$ | 341 |
| 7.8 Facteurs de distribution de charge longitudinale : $K_{H\beta} - K_{F\beta}$ | 344 |
| 7.8 Facteurs de distribution de charge longitudinale | 344 |
| 7.8.1 Détermination du facteur : $K_{H\beta \cdot Br}$ | 344 |
| 7.8.2 Détermination du facteur : $K_{H\beta \cdot Cr}$ | 344 |
| 7.8.3 Détermination du facteur $K_{H\beta \cdot D}$ par méthode D | 349 |
| 7.9 Facteurs de distribution de charge transversale : $K_{H\alpha} \cdot K_{F\alpha}$ | 352 |
| 7.9.1 Méthode B | 352 |
| 7.9.2 Méthode simplifiée C | 354 |
| 7.10 Rigidités des dents | 354 |
| 7.10.1 Méthode B | 354 |
| 7.10.2 Méthode C | 356 |
| RÉSISTANCE À LA PRESSION SUPERFICIELLE | 356 |
| 7.11 Rappel des formules de base (méthode B) | 356 |
| 7.12 Limite d'endurance pour la pression de Hertz du matériau : $\sigma_{H \cdot \lim}$ | 357 |
| 7.13 Facteur de durée : Z_{NT} | 359 |
| 7.14 Facteurs d'influence sur la formation du film d'huile | 362 |
| 7.14.1 Méthode B | 363 |
| 7.14.2 Méthode C | 366 |
| 7.15 Facteur de rapport de durestés : Z_W | 366 |
| 7.16 Facteur de dimension : Z_X | 367 |
| 7.17 Courbe de Wohler à la pression superficielle | 367 |

| | |
|---|----------------|
| RÉSISTANCE À LA RUPTURE | 368 |
| 7.18 Rappel des formules de base (méthode B) | 368 |
| 7.19 Limite d'endurance du matériau : σ_{FE} | 368 |
| 7.20 Facteur de durée : Y_{NT} | 370 |
| 7.21 Facteur de sensibilité à l'entaille : $Y_{\delta \cdot rel \cdot T}$ | 372 |
| 7.22 Facteur de rugosité : $Y_{R \cdot rel \cdot T}$ | 373 |
| 7.23 Facteur de dimension : Y_x (méthode B) | 374 |
| 7.24 Courbe de Wohler à la rupture | 375 |
| MÉTHODE D'APPLICATION POUR ENGRENAGES DE MÉCANIQUE GÉNÉRALE | 375 |
| 7.25 Méthode détaillée (<i>detailed method</i>) | 376 |
| 7.25.1 Limites d'application, 376 | |
| 7.25.2 Facteurs d'influence, 377 | |
| 7.25.3 Résistance superficielle, 378 | |
| 7.25.4 Résistance à la rupture, 378 | |
| 7.25.5 Conclusion, 379 | |
| 7.26 Méthode simplifiée (<i>simplified method</i>) | 379 |
| 7.26.1 Limites d'application, 379 | |
| 7.26.2 Charge nominale, 379 | |
| 7.26.3 Résistance à la pression superficielle, 379 | |
| 7.26.4 Résistance à la rupture, 385 | |
| 7.27 Applications : calcul de vérification de la capacité de charge d'un engrenage | 389 |
| 7.27.1 Méthode « détaillée », 389 | |
| 7.27.2 Méthode « simplifiée », 391 | |
| 7.28 Utilisation de la méthode simplifiée au stade du projet | 392 |
| 7.28.1 Facteur de service, 392 | |
| 7.28.2 Résistance superficielle, 392 | |
| 7.28.3 Résistance à la rupture, 394 | |
| 7.29 Cas d'un diagramme de charge variable | 394 |
| 7.29.1 Courbe de Wohler à la pression superficielle, 394 | |
| 7.29.2 Courbe de Wohler à la résistance à la rupture, 395 | |
| 7.29.3 Diagramme de charge variable, 396 | |
| 7.29.4 Pression superficielle – Facteur d'application, 396 | |
| 7.29.5 Résistance à la rupture, 398 | |
| 7.29.6 Exemple d'application, 399 | |

| | |
|--|------------|
| 8 • Calcul des dentures des engrenages concourants | 402 |
| 8.1 Formules générales | 402 |
| 8.2 Facteurs d'influence | 403 |
| 8.2.1 Facteur d'application K_A | 403 |
| 8.2.2 Facteur dynamique K_V | 404 |
| 8.2.3 Facteurs de répartition longitudinale $K_{H\beta C}$ et $K_{F\beta C}$ | 405 |
| 8.2.4 Facteurs de répartition transversale $K_{H\alpha}$ et $K_{F\alpha}$ | 407 |
| 8.3 Résistance superficielle | 408 |
| 8.3.1 Pression de contact nominale σ_{HO} | 408 |
| 8.3.2 Pression de contact de fonctionnement | 410 |
| 8.3.3 Pression de contact admissible σ_{HPr} | 410 |
| 8.4 Résistance à la rupture | 411 |
| 8.4.1 Contrainte de rupture nominale σ_{FO} | 411 |
| 8.4.2 Contrainte de rupture de fonctionnement | 414 |
| 8.4.3 Contrainte de rupture admissible | 415 |
| 8.5 Méthode industrielle simplifiée | 415 |
| 8.5.1 Pression superficielle | 415 |
| 8.5.2 Utilisation de la norme AGMA 2005 C96 | 418 |
| 9 • Modifications de la forme des dentures des engrenages parallèles | 421 |
| 9.1 Modifications dans le sens du profil | 421 |
| 9.1.1 Compensation de la flexion des dents | 421 |
| 9.1.2 Utilisation d'une denture High Contact Ratio (grand rapport de conduite) | 424 |
| 9.1.3 Compensation des écarts thermiques | 431 |
| 9.2 Modifications dans le sens longitudinal | 432 |
| 9.2.1 Compensation de la déformation du corps du pignon | 432 |
| 9.2.2 Influence du faux parallélisme | 434 |
| 9.2.3 Cas de l'utilisation de paliers lisses avec un engrenage à denture hélicoïdale | 434 |
| 9.2.4 Exécution d'un bombé longitudinal sans distorsion ou faux parallélisme | 435 |
| 9.2.5 Exécution d'un bombé longitudinal avec distorsion | 442 |
| 9.2.6 Compensation de déformation thermique | 443 |
| 9.3 Modification éventuelle des dentures HCR | 445 |
| 10 • calcul de résistance des engrenages à vis sans fin | 447 |
| 10.1 Proposition DIN 3996 | 447 |
| 10.1.1 Résistance superficielle au pitting | 447 |
| 10.1.2 Résistance à la rupture des dents de la roue | 449 |

| | |
|---|------------|
| 10.2 Norme BS 721 | 452 |
| 10.2.1 Résistance au pitting (de la roue), 452 | |
| 10.2.2 Résistance à la rupture, 455 | |
| 11 • Rendement dans les différents types d'engrenages. Capacité thermique | 458 |
| 11.1 Généralités | 458 |
| 11.2 Engrenages parallèles | 459 |
| 11.2.1 Perte dans les dentures dépendant de la charge : P_{Mr} , 459 | |
| 11.2.2 Perte dans les paliers dépendant de la charge : P_{Br} , 462 | |
| 11.2.3 Perte dans les joints ne dépendant pas de la charge : P_{Sr} , 463 | |
| 11.2.4 Perte par brassage et ventilation dans les engrenages : P_{WG} , 463 | |
| 11.2.5 Perte par brassage dans les paliers : P_{WG} , 463 | |
| 11.2.6 Dissipation thermique, 464 | |
| 11.2.7 Facteurs de correction de la capacité thermique, 464 | |
| 11.2.8 Lubrification par injection, 464 | |
| 11.3 Engrenages à vis sans fin | 466 |
| 11.3.1 Perte dans les dentures dépendant de la charge, 467 | |
| 11.3.2 Perte de puissance dans les paliers dépendant de la charge, 469 | |
| 12 • Détériorations des engrenages. Formation du film d'huile. Choix du lubrifiant | 470 |
| 12.1 Détériorations des engrenages | 470 |
| 12.1.1 Détériorations par rupture, 470 | |
| 12.1.2 Détériorations superficielles, 473 | |
| 12.2 Formation du film d'huile | 480 |
| 12.2.1 Unités de viscosité, 480 | |
| 12.2.2 Formation du film d'huile. Épaisseur minimale du film d'huile, 481 | |
| 12.2.3 Influence du lubrifiant sur les détériorations superficielles, 486 | |
| 12.2.4 Détermination de la viscosité du lubrifiant, 489 | |
| 12.2.5 Essai d'huile : appareil FZG, 493 | |
| 12.2.6 Cas extrêmes de problèmes de lubrification, 495 | |
| 13 • Trains planétaires | 500 |
| 13.1 Trains planétaires simples | 500 |
| 13.1.1 Trains plans à roues cylindriques, 500 | |
| 13.1.2 Trains planétaires à roues coniques, 534 | |
| 13.2 Trains planétaires spéciaux pour grands rapports | 537 |
| 13.2.1 Train imbriqué, 537 | |
| 13.2.2 Variante du train III, 544 | |
| 13.2.3 Train avec satellite simple récepteur, 546 | |

| | |
|--|------------|
| 13.3 Trains composés | 548 |
| 13.4 Calculs de résistance | 557 |
| 13.4.1 Résistance superficielle, 557 | |
| 13.4.2 Résistance à la rupture, 558 | |
| 13.4.3 Égalisation de la résistance superficielle et de la résistance à la rupture, 559 | |
| 13.4.4 Influence du nombre de cycles, 560 | |
| 14 • Matériaux. Traitements thermiques | 563 |
| 14.1 Introduction | 563 |
| 14.2 Aciers | 566 |
| 14.2.1 Traitements thermiques complets, 566 | |
| 14.2.2 Traitements thermiques superficiels, 567 | |
| 14.2.3 Trempe superficielle par induction, 575 | |
| 14.2.4 Domaines d'application des procédés de traitements thermiques superficiels, 576 | |
| 14.3 Fontes | 576 |
| 14.3.1 Fontes grises, 576 | |
| 14.3.2 Fontes ductiles, 579 | |
| 14.4 Bronzes | 581 |
| 14.4.1 Bronzes à l'étain et phosphore, 581 | |
| 14.4.2 Bronzes au manganèse, 581 | |
| 14.4.3 Bronzes à l'aluminium, 581 | |
| 14.4.4 Bronzes au silicium, 582 | |

B

Fabrication et contrôle des engrenages

| | |
|---|------------|
| 15 • Taillage des roues cylindriques | 585 |
| 15.1 Taillage par fraise de forme | 585 |
| 15.2 Taillage par génération | 586 |
| 15.2.1 Taillage par outil-crémaillère, 587 | |
| 15.2.2 Taillage par fraise mère, 593 | |
| 15.2.3 Taillage par outil-pignon, 607 | |

| | |
|---|------------|
| 16 • Taillage des roues coniques | 614 |
| 16.1 Introduction | 614 |
| 16.2 Denture droite | 615 |
| 16.3 Denture hélicoïdale | 618 |
| 16.4 Dentures spirales | 618 |
| 16.4.1 Denture spirale Gleason, 619 | |
| 16.4.2 Denture spirale Oerlikon-Klingelnberg, 625 | |
| 17 • Taillage des engrenages à vis sans fin | 629 |
| 17.1 Vis sans fin | 629 |
| 17.1.1 Taillage de la vis sans fin, 629 | |
| 17.1.2 Rectification du filet de vis, 630 | |
| 17.2 Roues à vis sans fin | 631 |
| 17.2.1 Taillage par avance radiale, 631 | |
| 17.2.2 Taillage par avance tangentielle, 631 | |
| 17.2.3 Répercussion de l'usure de la fraise mère, 632 | |
| 17.2.4 Taillage par outils-mouches, 632 | |
| 17.2.5 Utilisation d'une fraise de diamètre augmenté, 634 | |
| 18 • Rectification des roues cylindriques | 635 |
| 18.1 Introduction | 635 |
| 18.2 Rectification par génération | 635 |
| 18.2.1 Procédé Maag, 635 | |
| 18.2.2 Procédé Hofler, 639 | |
| 18.2.3 Procédé Reishauer, 641 | |
| 18.3 Rectification par meule de forme | 642 |
| 18.3.1 Cas de la denture hélicoïdale, 646 | |
| 19 • Rasage (shaving) et superfinition (honing) des roues cylindriques | 647 |
| 19.1 Rasage (shaving) | 647 |
| 19.1.1 Méthode longitudinale, 648 | |
| 19.1.2 Méthode « oblique », 649 | |
| 19.1.3 Méthode « transversale », 649 | |
| 19.1.4 Méthode « en plongée », 650 | |
| 19.2 Honing | 652 |

| | |
|---|------------|
| 20 • Tolérances des dentures. Contrôle | 656 |
| 20.1 ISO 1328 Partie 1 | 657 |
| 20.1.1 Division, 657 | |
| 20.1.2 Profil, 658 | |
| 20.1.3 Erreurs d'hélice, 661 | |
| 20.2 ISO 1328 Partie 2 | 663 |
| 20.2.1 Faux rond de denture : Fr, 663 | |
| 20.2.2 Erreur composée radiale d'une roue, 663 | |
| 20.2.3 Erreur composée tangentielle d'une roue, 664 | |
| 20.3 Bases d'établissement du système de tolérances | 664 |
| 20.3.1 Tolérances des écarts d'erreurs de denture d'une roue, 665 | |
| 20.3.2 Épaisseur des dents, 666 | |
| 20.3.3 Contrôle du corps de roue, 668 | |
| 20.3.4 Contrôle de l'engrenage monté, 668 | |
| 20.3.5 Jeu entre dents, 669 | |
| 20.3.6 Groupes de fonction de tolérances, 669 | |
| 20.4 Contrôles relatifs aux flancs homologues | 671 |
| 20.4.1 Division, 671 | |
| 20.4.2 Profil, 674 | |
| 20.4.3 Contrôle de l'hélice, 681 | |
| 20.4.4 Contrôle de l'épaisseur des dents, 681 | |
| 20.4.5 Contrôle de l'erreur composée, 690 | |
| 20.4.6 Appareils combinés 3D, 692 | |
| 20.4.7 Contrôle de l'état de surface, 693 | |
| 20.4.8 Valeurs indicatives de R_a , 699 | |

C

Ensembles à engrenages

| | |
|---|------------|
| 21 • Ensembles simples de mécanique générale | 703 |
| 21.1 Classification. Dispositions générales | 703 |
| 21.2 Gamme d'entraxes | 709 |
| 21.3 Capacité de charge mécanique | 709 |
| 21.4 Rapports normalisés | 712 |
| 21.5 Proportions des roues | 712 |
| 21.6 Réducteurs à deux trains | 712 |

| | |
|---|-----|
| 21.7 Réducteurs à trois trains | 714 |
| 21.8 Capacité thermique : P_{th} | 715 |
| 21.9 Calcul des arbres | 717 |
| 21.10 Lubrification | 718 |
| 21.10.1 Modes de lubrification par barbotage, 718 | |
| 21.10.2 Lubrification par injection, 719 | |
| 21.10.3 Types de lubrifiants, 720 | |
| 21.11 Fretage | 721 |
| 21.11.1 Formules de base, 721 | |
| 21.11.2 Pression de contact entre les deux éléments, 722 | |
| 21.11.3 Effort total de contact entre les deux éléments, 722 | |
| 21.11.4 Sécurité au glissement K , 722 | |
| 21.11.5 Coefficient de frottement f , 722 | |
| 21.11.6 Cas d'un centre de roue de forme plus compliquée, 723 | |
| 21.11.7 Contraintes de fretage, 723 | |
| 22 • Exemples de transmissions dans l'industrie du ciment | 730 |
| 22.1 Commande latérale de broyeur et de four à ciment horizontaux | 730 |
| 22.2 Commande centrale des broyeurs horizontaux | 733 |
| 22.2.1 Réducteurs à trains d'engrenages parallèles, 734 | |
| 22.2.2 Réducteurs à trains planétaires, 736 | |
| 22.3 Broyeurs verticaux | 737 |
| 23 • Transmissions pour industrie sidérurgique | 740 |
| 24 • Facteurs de service pour ensembles de mécanique générale | 744 |
| 25 • Ensembles à grande vitesse | 746 |
| 25.1 Introduction | 746 |
| 25.2 Dispositions générales | 746 |
| 25.2.1 Denture en chevron, 746 | |
| 25.2.2 Denture hélicoïdale simple, 746 | |
| 25.2.3 Denture hélicoïdale simple avec collets de butée, 746 | |
| 25.2.4 Denture hélicoïdale simple avec arbre de liaison torsible du côté roue, 746 | |
| 25.2.5 Denture hélicoïdale simple avec arbres de liaison torsibles du côté roue et du côté pignon, 748 | |
| 25.3 Proportions de denture | 748 |
| 25.4 Calculs de résistance | 749 |
| 25.5 Série de « très grande largeur » pour réducteurs à très grande vitesse et faibles rapports | 753 |

| | |
|---|------------|
| 25.6 Facteurs de service | 755 |
| 25.7 Lubrification | 756 |
| 26 • Transmissions de marine | 757 |
| 26.1 Transmissions par turbine | 757 |
| 26.2 Transmissions par moteurs diesel | 760 |
| 26.3 Transmissions couplées moteurs diesel-turbines à gaz | 763 |
| 27 • Ensembles à engrenages à vis sans fin | 765 |
| 27.1 Dispositions générales | 765 |
| 27.2 Normalisation | 768 |
| 27.3 Capacité de charge mécanique | 769 |
| 27.4 Capacité thermique | 769 |
| 28 • Essais des ensembles à engrenages. Codes de réception | 771 |
| 28.1 Essais des ensembles à engrenages | 771 |
| 28.1.1 Méthode d'essais avec freins, 771 | |
| 28.1.2 Méthode d'essais avec disposition à « cycle fermé » (back to back), 772 | |
| 28.1.3 Essai pour ensembles à grande vitesse et grande puissance, 774 | |
| 28.2 Réception des ensembles à engrenages aux vibrations | 775 |
| 28.2.1 Généralités, 775 | |
| 28.2.2 Recommandations ISO et AGMA, 777 | |
| 28.2.3 Vibrations en régime de résonance, 777 | |
| 28.2.4 Différentes causes de vibrations, 784 | |
| 28.3 Réception des ensembles à engrenage au bruit | 784 |
| 28.3.1 Différentes causes de bruit provenant d'un engrenage, 784 | |
| 28.3.2 Rappels d'acoustique, 786 | |
| 28.3.3 Processus de mesure. Correction pour bruits ambiants, 789 | |
| 28.3.4 Surfaces de mesure, 790 | |
| 28.3.5 Intérêt du spectre de fréquences, 792 | |
| 28.3.6 Recommandations pratiques sur les niveaux sonores, 792 | |
| 29 • Accouplements. Alignement des axes | 796 |
| 29.1 Accouplements rigides (n'acceptant pas de désalignement) | 796 |
| 29.2 Désalignement | 799 |
| 29.2.1 Accouplements à denture, 799 | |
| 29.2.2 Accouplements à ressorts métalliques, 805 | |
| 29.2.3 Accouplements avec éléments métalliques flexibles, 806 | |
| 29.2.4 Accouplements avec éléments en élastomère, 810 | |

| | |
|--|------------|
| 29.3 Alignement des arbres accouplés en service | 812 |
| 29.3.1 Détails pratiques d'installation, 813 | |
| 29.3.2 Détails pratiques du montage, 815 | |
| 29.3.3 Méthode d'alignement du pignon sur la couronne d'entraînement latéral d'un broyeur à ciment, 816 | |
| 30 • Contrôle de la portée des dentures | 819 |
| 30.1 Engrenages parallèles | 819 |
| 30.2 Engrenages concourants | 820 |
| 30.3 Engrenages à vis sans fin | 823 |
| 31 • Paliers : conception, détériorations, maintenance | 825 |
| 31.1 Paliers à roulements | 825 |
| 31.1.1 Influence des conditions de fonctionnement sur la durée de vie, 829 | |
| 31.1.2 Systèmes de lubrification, 830 | |
| 31.1.3 Maintenance et entretien des roulements, 831 | |
| 31.2 Paliers lisses | 835 |
| 31.2.1 Introduction, 835 | |
| 31.2.2 Calculs propres aux paliers lisses, 837 | |
| 32 • Problèmes liés à la lubrification et à l'évacuation des calories | 843 |
| 32.1 Maintenance liée à la surveillance des détériorations des dentures | 843 |
| 32.1.1 Huiles, 843 | |
| 32.1.2 Surveillance des dentures, 848 | |
| 32.2 Problèmes liés à l'évacuation des calories | 851 |
| 32.2.1 Introduction, 851 | |
| 32.2.2 Exemple, 852 | |
| 32.2.3 Puissance dissipée : P_O , 858 | |
| 32.2.4 Capacité thermique, 858 | |
| 32.2.5 Rendement, 858 | |
| 32.2.6 Évacuation des calories par le carter, 859 | |
| 33 • Maintenance pour bruit et vibrations | 866 |
| 33.1 Document ISO/WD 8579-1 (bruit) | 866 |
| 33.1.1 Introduction, 866 | |
| 33.1.2 Méthodes de détermination, 866 | |
| 33.1.3 Maintenance, 870 | |
| 33.2 Document ISO/WD 8579-2 (vibrations) | 870 |
| Bibliographie | 871 |
| Index | 873 |

Avant-propos

Comme pour la septième édition, nous avons procédé à une modification fondamentale, consistant à ne présenter qu'un seul volume au lieu de deux. L'ouvrage actuel est donc naturellement très important. Il est divisé en trois parties, couvrant tout le domaine de l'engrenage :

- première partie : conception des engrenages ;
- deuxième partie : fabrication et contrôle ;
- troisième partie : exemples de réalisation d'ensembles à engrenages, réception et maintenance.

La première partie reprend la plupart des éléments des éditions précédentes, relatifs à la conception de base que nous appellerons théorique : nous avons conservé le caractère pédagogique permettant la compréhension fondamentale des différents types d'engrenages. Nous retrouvons évidemment les méthodes de calcul de résistance : elles sont basées sur les dernières recommandations ISO que nous avons mises à jour par rapport à la 7^e édition, ce qui est très important. Nous avons insisté sur les méthodes industrielles simplifiées et suffisamment précises dont nous sommes l'auteur, à la suite d'une expérience de plus de cinquante ans dans les principales firmes d'engrenages, dans des domaines très variés et de haute performance, et d'un contact constant et très fructueux avec les spécialistes français et étrangers à l'ISO et l'AGMA.

Nous avons également insisté sur une évolution actuelle des dentures, par exemple les dentures dites HCR (High Contact Ratio), qui ont de plus en plus la faveur dans la lutte contre le bruit et les vibrations.

Le chapitre consacré aux trains planétaires est également très développé, étant donné l'importance accrue de ces ensembles dans les transmissions modernes.

Nous avons introduit un chapitre important consacré aux matériaux et aux exigences pour certains procédés de traitements thermiques.

La deuxième partie est consacrée aux principales méthodes de fabrication des engrenages, pour les différents types, avec les machines les plus récentes à commande numérique, pour le taillage, la rectification, le shaving et le honing.

Le chapitre consacré au contrôle est très développé. Il comporte non seulement la revue des différents critères de qualité des dentures, mais également les différents documents ISO concernant les tolérances des classes de qualité proposées. Les appareils de contrôle les plus modernes sont également décrits, la plupart d'entre eux étant d'ailleurs à commande numérique.

La troisième partie de l'ouvrage est consacrée aux ensembles à engrenages. Nous indiquons les réalisations les plus intéressantes et modernes dans les domaines suivants :

- mécanique générale ;
- industrie du ciment ;
- industrie sidérurgique ;
- ensembles à grande vitesse ;
- transmissions de marine ;
- ensembles à engrenages à vis sans fin.

Nous mentionnons quelques aspects fondamentaux comme par exemple la lubrification et la capacité thermique.

Une partie très importante est consacrée à la réception des ensembles à engrenages, par exemple au sujet du bruit et des vibrations. Il était également important de donner des informations au sujet des accouplements, qui jouent un rôle primordial entre les organes menants et menés.

L'examen et le contrôle des portées des dentures sont également mentionnés étant donné leur importance dans une appréciation globale de la qualité des engrenements. Il est également intéressant de consacrer un chapitre aux différents types de paliers, paliers lisses et paliers à roulements à billes et galets, avec indication des précautions à prendre pour leur maintenance.

Pour être complet, cette troisième partie est très axée sur tous les problèmes de maintenance des ensembles à engrenages.

Qu'il me soit permis d'exprimer dans cette dernière édition, tout le plaisir que m'ont procuré ces longues années consacrées aux engrenages, depuis le début de ma coopération avec mon maître, le Recteur Capelle, grâce à un contact très profond avec tout le monde technique spécialisé, aussi bien en France qu'à l'étranger.

Pour la 7^e édition de mon ouvrage, j'avais eu le plaisir de compter sur les préfaces de Messieurs Allard et Octrue : je les remercie encore pour leur marque de sympathie.

Pour cette 8^e édition, je suis heureux d'accueillir Monsieur Jacques Boisset, un fidèle ami que j'ai eu le plaisir et l'honneur de fréquenter durant mes belles années de coopération avec la prestigieuse société Maag de Zurich. Il continue la réalisation d'ensembles à engrenages de haute technicité, et a consacré ces dernières années à la présidence de la fédération Unitram.

Pour cette dernière édition, je me dois d'exprimer toute ma reconnaissance à la maison Dunod pour l'excellente collaboration et la qualité des ouvrages édités depuis 1949.

Georges Henriot

A

Conception des engrenages

1 • RAPPEL DES NOTIONS FONDAMENTALES

A

CONCEPTION DES ENGRENAGES

1.1 Théorie élémentaire sur les vecteurs

On appelle *axe* une droite indéfinie xx' sur laquelle on a défini un sens de parcours, positif ou négatif (figure 1.1). Un *vecteur* est un segment AB de cet axe sur lequel on a fixé un sens. Un vecteur est défini par les trois données suivantes :

- sa direction : qui est celle de l'axe xx' qui lui sert de support ;

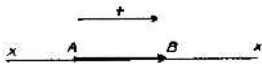


Figure 1.1 – Vecteur

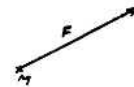


Figure 1.2 – Vecteur force

- son sens : qui est positif ou négatif comparativement au sens positif choisi pour l'axe ;
- son intensité : déterminée par sa longueur AB .

En mécanique, les vecteurs servent à matérialiser les *forces* appliquées à un système déterminé. Le vecteur \vec{F} , par exemple (figure 1.2), fixe la direction de la force, son sens, son intensité et son point d'application M . (Au sujet de l'intensité, il suffit de choisir une échelle.)

1.1.1 Composition des forces

■ Deux forces concourantes

La *somme* \vec{R} des deux forces F_1 et F_2 concourantes au point M est déterminée facilement par la règle dite « du parallélogramme ». C'est la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés sont respectivement égaux aux vecteurs représentatifs des forces F_1 et F_2 (figure 1.3).

Nous écrivons :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (1.1)$$

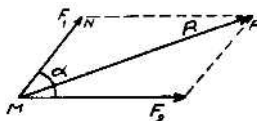


Figure 1.3 – Deux forces concourantes

L'intensité de la somme est déterminée facilement ; dans le triangle MNP nous avons :

$$\overline{MP}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{NP}^2 - 2MN \cdot NP \cos \widehat{MNP}$$

soit :

$$|R| = \sqrt{\overline{F_1}^2 + \overline{F_2}^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha} \quad (1.2)$$

■ Deux forces parallèles

□ Premier cas (figure 1.4)

Les deux forces F_1 et F_2 sont parallèles et de même sens.

La somme \vec{R} est déterminée :

- par sa direction, qui est parallèle à la direction des deux forces composantes ;
- par son sens, qui est évidemment le même que celui de F_1 et F_2 ;
- par son intensité :

$$|R| = |F_1| + |F_2| \quad (1.3)$$

– par son point d'application M , situé à l'intérieur du segment joignant les points d'application M_1 et M_2 des forces F_1 et F_2 , à une distance de ceux-ci déterminée par la relation connue suivante :

$$|F_1| \cdot MM_1 = |F_2| \cdot MM_2$$

soit :

$$\frac{MM_1}{MM_2} = \frac{|F_2|}{|F_1|} \quad (1.4)$$

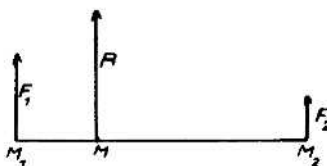


Figure 1.4 – Deux forces parallèles et de même sens

□ Second cas (figure 1.5)

Les deux forces F_1 et F_2 sont parallèles, mais de sens contraires.

La somme \vec{R} a même direction que les deux forces composantes, le sens de celle qui a la plus forte intensité. Son intensité est égale à la différence des intensités des deux composantes.

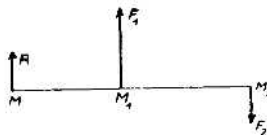


Figure 1.5 – Deux forces parallèles et de sens opposés

Son point d'application M est situé, dans ce cas, à l'extérieur du segment $M_1 M_2$, du côté de la force ayant la plus forte intensité et il vérifie la relation :

$$|F_1| \cdot MM_1 = |F_2| \cdot MM_2$$

soit :

$$\frac{MM_1}{MM_2} = \frac{|F_2|}{|F_1|} \quad (1.5)$$

■ Système de forces (figure 1.6)

Soit un ensemble de forces $F_1, F_2, F_3, F_4 \dots$ réparties d'une façon quelconque. Leur somme est obtenue simplement de la façon suivante.

Par un point O quelconque de l'espace, mener un vecteur équipollent à \vec{F}_1 . Par l'extrémité de \vec{F}_1 , mener un vecteur équipollent à \vec{F}_2 et ainsi de suite. La somme \vec{R} est le vecteur \vec{OA} , A étant l'extrémité du dernier des vecteurs portés bout à bout. Il est bien évident que le vecteur \vec{R} reste équipollent à lui-même, quelle que soit la position du point O dans l'espace.

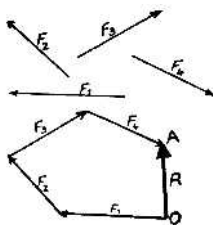


Figure 1.6 – Système de forces

1.1.2 Rappel sur les moments

Le moment d'un vecteur \vec{F} par rapport à un point M est un vecteur \vec{MG} dont l'intensité est égale au produit de l'intensité du vecteur \vec{F} par la distance de M au support de celui-ci :

$$|MG| = |F| \cdot MH \quad (1.6)$$

Sa direction est perpendiculaire au plan formé par le point M et le vecteur représentatif \vec{F} .

Son sens est tel qu'un observateur traversé des pieds à la tête par ce vecteur \vec{MG} voit le vecteur \vec{F} dirigé dans le sens positif (sens trigonométrique, inverse du sens de rotation des aiguilles d'une montre) (figure 1.7).

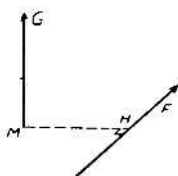


Figure 1.7 – Vecteur moment

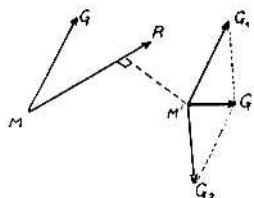


Figure 1.8 – Réduction d'un système en un autre point M'

■ Moment résultant d'un système de vecteurs par rapport à un point M

Il suffit de déterminer séparément les moments des différents vecteurs par rapport au point M . On compose ensuite les vecteurs représentatifs de ces moments d'après la règle donnée précédemment. On obtient ainsi le moment résultant \vec{G} .

Le moment d'un vecteur ou d'un système de vecteurs par rapport à un point M dépend donc de la position de ce point dans l'espace : sa direction étant variable suivant le point M , il est possible de trouver un point M particulier tel que le vecteur moment résultant \vec{G} ait même support que le vecteur somme \vec{R} : le support commun aux deux vecteurs \vec{G} et \vec{R} est alors appelé *axe central* du système de vecteurs.

Connaissant les éléments de réduction d'un système de vecteurs en un point M c'est-à-dire la somme \vec{R} et le moment résultant \vec{G} , les éléments de réduction en un autre point M' s'en déduisent comme suit (figure 1.8) :

- somme \vec{R}' : équivalente à \vec{R} ;
- moment résultant $\vec{G}' =$ somme géométrique du vecteur \vec{G}_1 équivalent à \vec{G} et du vecteur \vec{G}_2 représentant le moment de la somme \vec{R} par rapport au point M' .

■ Couple

Dans le cas de forces par exemple, un couple est un système de deux forces parallèles, de sens inverses et de même intensité. La somme \vec{R} est alors nulle

et le moment résultant \vec{G} est le même par rapport à tous les points de l'espace (en effet, en se reportant au paragraphe précédent, \vec{G}_2 est toujours nul). En prenant, par exemple, le point M situé sur le support du vecteur représentatif \vec{F}_2 nous obtenons (figure 1.9) :

$$|G| = |F_1| \cdot MH$$

(le moment de \vec{F}_2 par rapport à M est nul).

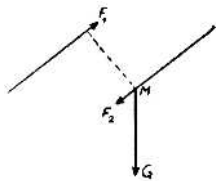


Figure 1.9 – Couple

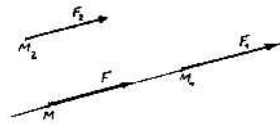


Figure 1.10 – Systèmes de forces équivalents

1.1.3 Systèmes de forces équivalents

Deux systèmes de forces sont équivalents par rapport à un point M de l'espace si les éléments de réduction de ces deux systèmes par rapport à M , à savoir somme \vec{R} et moment résultant \vec{G} , sont identiques.

Si nous transportons le vecteur force \vec{F} le long de son support, de \vec{F} en \vec{F}_1 par exemple (figure 1.10), nous ne changeons pas le système de forces (\vec{R} et \vec{G} ne sont pas modifiés).

En revanche, si nous le transportons en \vec{F}_2 , le vecteur \vec{F}_2 étant équipollent à \vec{F} , le système de forces n'est plus équivalent ; en effet, si \vec{R} a toujours la même valeur, il n'en est plus de même pour G .

1.2 Vitesses et composition des vitesses

Soit (C) la trajectoire du point matériel M (figure 1.11). À l'instant t , le point M est en M_0 , et à l'instant $(t + \Delta t)$ il est en M_1 . La *vitesse moyenne* du point matériel de M_0 à M_1 peut être représentée par le vecteur \vec{v}_m , ayant comme support le segment M_0M_1 , dirigé de M_0 à M_1 et ayant comme intensité :

$$|v_m| = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Δs étant la longueur de l'arc $\widehat{M_0M_1}$ de la trajectoire.



Figure 1.11 – Vitesse

Pour obtenir la *vitesse instantanée* du point matériel au temps t , il suffit de faire tendre Δt vers zéro. Le vecteur vitesse moyenne \vec{v}_m tend vers le vecteur vitesse instantanée en M_0 , soit \vec{v} .

Ce vecteur \vec{v} est donc tangent en M_0 à (C) et est dirigé dans le sens du mouvement. Son intensité est égale à :

$$|\vec{v}| = \frac{ds}{dt} \quad (1.7)$$

ds et dt désignant des quantités infiniment petites.

Si $s = f(t)$ est l'équation du mouvement de trajectoire (C) , la vitesse du point matériel s'obtient donc en dérivant cette fonction par rapport au temps.

Un corps solide étant formé d'une infinité de points matériels, son mouvement sera donc connu si nous connaissons les fonctions du temps $s = f(t)$ définissant les trajectoires de chacun de ses points. Si le solide est indéformable, et c'est le cas général, les positions de trois de ses points déterminent complètement son mouvement.

1.2.1 Mouvements fondamentaux

Il existe trois mouvements fondamentaux. (Notons que nous supposons toujours le solide comme indéformable.)

■ Mouvement de translation

Un solide est animé d'un mouvement de translation quand il se déplace de manière que les segments de droite joignant les points du corps deux à deux restent équipollents à eux-mêmes (figure 1.12).

Soit par exemple A_0 , B_0 et C_0 les positions de trois points du solide (S) à l'instant t . À l'instant $(t + \Delta t)$, ces points occupent les positions A_1 , B_1 et C_1 . Nous avons alors :

- A_1B_1 équipollent à A_0B_0 ;
- A_1C_1 équipollent à A_0C_0 , etc.

Nous pouvons donc écrire que dans un mouvement de translation les trajectoires des différents points du solide sont identiques ; les vitesses instantanées de tous les points à un instant quelconque sont donc représentées par des vecteurs équipollents :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C \quad (1.8)$$

Si les trajectoires des différents points du solide sont rectilignes, celui-ci est animé d'un *mouvement de translation rectiligne*.

Si la vitesse instantanée conserve une valeur constante, le mouvement est dit *uniforme*.

Une translation rectiligne uniforme peut donc être représentée par un vecteur \vec{v} , indiquant la direction et le sens du déplacement, ainsi que la valeur absolue de la vitesse (figure 1.13).

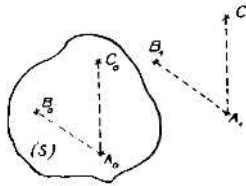


Figure 1.12 – Translation

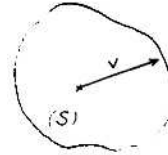


Figure 1.13 – Translation

■ Mouvement de rotation

Un corps est animé d'un mouvement de rotation si deux de ses points restent fixes (figure 1.14). Il est bien évident que si A et B sont les deux points fixes, l'axe xx' passant par ceux-ci est tel que tous ses points sont également fixes : c'est l'axe de rotation.

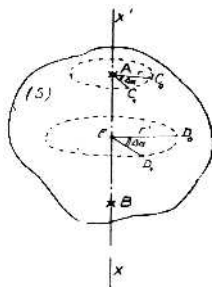


Figure 1.14 – Rotation

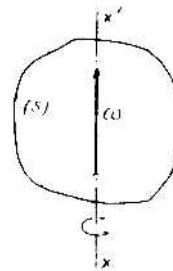


Figure 1.15 – Rotation

Tous les points du solide décrivent donc des circonférences dont les rayons sont les distances de ces points à l'axe xx' (le point C décrit la circonférence de centre A et rayon r , tandis que le point D décrit la circonférence de centre E et rayon r').

Quand le corps solide passe d'une position (0) à une autre position (1), tous ses points tournent d'un même angle $\Delta\alpha$. Si Δt est l'intervalle de temps mis pour passer d'une position à l'autre, nous pouvons définir la *vitesse angulaire moyenne* dont la valeur absolue est égale à :

$$|\omega_m| = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \quad (1.9)$$

De même que pour les vitesses linéaires, nous pouvons définir la *vitesse angulaire instantanée* à l'instant t en faisant tendre Δt vers zéro.

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} \quad (1.10)$$

La rotation du corps étant définie par une fonction $\alpha = f(t)$, la vitesse angulaire instantanée à un instant quelconque t est donc obtenue en dérivant cette fonction par rapport au temps.

Si la vitesse instantanée conserve une valeur constante, le mouvement est une *rotation uniforme* ; il est représenté par un vecteur $\vec{\omega}$ (figure 1.15) porté par l'axe de rotation, dont le sens est tel qu'un observateur traversé des pieds à la tête par ce vecteur voit tourner le corps dans le sens positif (inverse du sens de rotation des aiguilles d'une montre). L'intensité de ce vecteur est proportionnelle à la valeur absolue de la vitesse angulaire.

ω est toujours exprimée en radians par seconde, de sorte que nous pouvons écrire que la vitesse linéaire (ou tangentielle) d'un point quelconque C du solide situé à une distance r de l'axe de rotation est égale à :

$$v = r \cdot \omega \quad (\text{figure 1.16})$$

Notons que le vecteur \vec{v} peut être considéré comme le moment du vecteur $\vec{\omega}$ par rapport au point C .

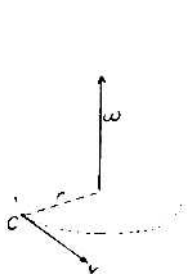


Figure 1.16 – Vitesse tangentielle

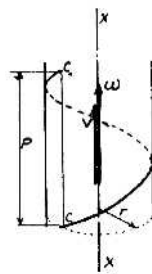


Figure 1.17 – Mouvement hélicoïdal simple

■ Mouvement de vissage

Le mouvement de vissage résulte de la superposition d'une translation et d'une rotation. Si la rotation est uniforme autour d'un axe xx' et si la translation est uniforme et parallèle à xx' , nous obtenons le *mouvement hélicoïdal simple* (figure 1.17).

Il peut être représenté par deux vecteurs portés par l'axe xx' :

- le vecteur translation \vec{v} ;
- le vecteur rotation $\vec{\omega}$.

Tous les points du solide décrivent des hélices de même pas p , enroulées sur des cylindres dont les rayons sont les distances des points considérés à l'axe de rotation.

1.2.2 Composition des mouvements : mouvement relatif, mouvement d'entraînement, mouvement absolu

Nous venons d'étudier le mouvement d'un solide S par rapport à un système de référence fixe.

Nous allons voir maintenant le mouvement d'un solide S_1 mobile par rapport à un autre solide S_2 , lui-même mobile par rapport à un système de référence fixe A (figure 1.18).

Le mouvement de S_1 par rapport à S_2 (soit $\frac{S_1}{S_2}$) est appelé *mouvement relatif*.

Le mouvement $\frac{S_2}{A}$ est appelé *mouvement d'entraînement*.

Le mouvement $\frac{S_1}{A}$ du solide S_1 par rapport au système de référence est le *mouvement absolu* de S_1 .

Le mouvement relatif et le mouvement d'entraînement sont deux mouvements simples que nous avons étudiés précédemment. Si \vec{v}_r (*vitesse relative*) est la vitesse du point 1 de S_1 par rapport au point 2 de S_2 , et \vec{v}_e (*vitesse d'entraînement*) étant la vitesse du point 2 par rapport au système de référence fixe, la *vitesse absolue* du point 1 de S_1 par rapport au système de référence est donnée par la relation géométrique suivante (figure 1.19) :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \quad (1.11)$$

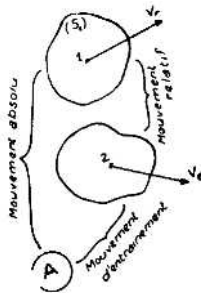


Figure 1.18 – Composition des mouvements

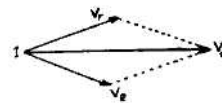


Figure 1.19 – Composition des vitesses

Exemple

Les vecteurs vitesses linéaires et vitesses angulaires se composent comme de simples vecteurs.

■ Composition de deux translations (figure 1.20)

Soit un chariot (1) animé d'un mouvement de translation à l'intérieur des glissières d'un bâti fixe : cette translation est représentée par le vecteur \vec{v}_e , vitesse

d'entraînement. Ce chariot porte des glissières dans lesquelles se déplace un coulisseau (2) avec une vitesse de translation \vec{v}_r , mouvement relatif.

Le mouvement du coulisseau par rapport au bâti fixe est également une translation de vecteur vitesse \vec{v}_a , vitesse absolue, tel que :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

Au bout du temps unité, le coulisseau s'est déplacé de O en O' .

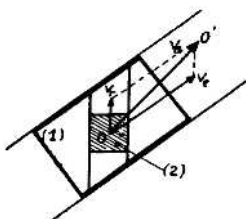


Figure 1.20 – Composition de deux translations

■ Une rotation et une translation parallèle à l'axe de rotation

Nous avons vu que le mouvement résultant était un mouvement hélicoïdal.

■ Deux rotations $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\omega}_2$ dont les axes sont parallèles, et de même sens

Le mouvement résultant est une rotation de vecteur vitesse $\vec{\Omega}$, qui peut être déterminé comme dans le cas de la composition de vecteurs forces (figure 1.21).

Axe X : parallèle aux deux axes X_1 et X_2 , tel que :

$$\frac{IO_1}{IO_2} = \frac{|\vec{\omega}_2|}{|\vec{\omega}_1|} \quad (1.12)$$

I est intérieur au segment O_1O_2 .

$\vec{\Omega}$: de même sens que $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\omega}_2$ et :

$$|\vec{\Omega}| = |\vec{\omega}_1| + |\vec{\omega}_2|$$

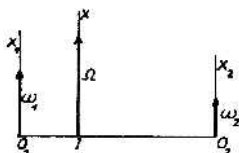


Figure 1.21 – Composition de deux rotations parallèles et de même sens

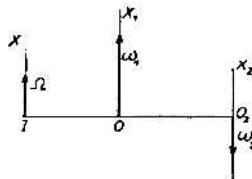


Figure 1.22 – Composition de deux rotations parallèles et de sens contraires

■ **Deux rotations $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\omega}_2$ dont les axes sont parallèles, et de sens contraires (figure 1.22)**

Le mouvement résultant est une rotation de vecteur vitesse $\vec{\Omega}$ déterminé comme suit :

Axe X : parallèle aux deux axes X_1 et X_2 et tel que :

$$\frac{IO_1}{IO_2} = \frac{|\vec{\omega}_2|}{|\vec{\omega}_1|} \quad (1.13)$$

I est extérieur au segment O_1O_2 .

$\vec{\Omega}$: de même sens que celui des deux vecteurs $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\omega}_2$ ayant la plus forte intensité et :

$$|\Omega| = |\vec{\omega}_1| - |\vec{\omega}_2| \quad (1.14)$$

■ **Deux rotations concourantes $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\omega}_2$ (figure 1.23)**

Le mouvement résultant est une rotation de vecteur vitesse $\vec{\Omega}$ déterminé par la règle du parallélogramme.

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

et :

$$|\vec{\Omega}| = \sqrt{|\vec{\omega}_1|^2 + |\vec{\omega}_2|^2 + 2|\vec{\omega}_1| \cdot |\vec{\omega}_2| \cdot \cos \Delta} \quad (1.15)$$

■ **Deux rotations $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\omega}_2$ dont les axes X_1 et X_2 ne sont ni parallèles ni concourantes (figure 1.24)**

Les éléments de réduction de ce système de deux vecteurs sont définis de la façon suivante.

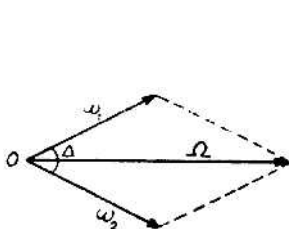


Figure 1.23 – Composition de deux rotations concourantes

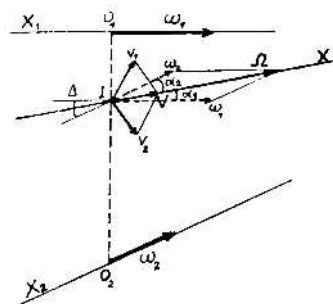


Figure 1.24 – Composition de deux rotations d'axes quelconques

□ **Somme $\vec{\Omega}$**

C'est une rotation dont l'axe X passe par le point I de la plus courte distance O_1O_2 des axes X_1 et X_2 , et déterminée par la règle du parallélogramme.

Appelons : Δ l'angle des deux axes X_1 et X_2

α_1 l'angle des deux axes X et X_1

α_2 l'angle des deux axes X et X_2 .

Nous avons :

$$\frac{IO_1}{IO_2} = \frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2}$$

avec :

$$\frac{|\vec{\omega}_1|}{\sin \alpha_2} = \frac{|\vec{\omega}_2|}{\sin \alpha_1}$$

et :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \Delta$$

et :

$$|\vec{\Omega}| = \sqrt{|\vec{\omega}_1|^2 + |\vec{\omega}_2|^2 + 2|\vec{\omega}_1| \cdot |\vec{\omega}_2| \cdot \cos \Delta} \quad (1.16)$$

□ **Moment résultant \vec{V}**

C'est la somme des moments des vecteurs $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\omega}_2$ par rapport au point I .

Ceux-ci sont des vitesses linéaires et leurs vecteurs représentatifs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 sont respectivement perpendiculaires aux plans formés par les vecteurs $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\omega}_2$ avec le point I ; leur sens est déterminé par la règle énoncée dans un paragraphe précédent :

$$\vec{V} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

(le support de \vec{V} coïncide avec celui de $\vec{\Omega}$)

$$|\vec{v}_1| = |\vec{\omega}_1| \cdot IO_1$$

$$|\vec{v}_2| = |\vec{\omega}_2| \cdot IO_2$$

et :

$$|\vec{V}| = \sqrt{\omega_1^2 \cdot IO_1^2 + \omega_2^2 \cdot IO_2^2 - 2\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot IO_1 \cdot IO_2 \cdot \cos \Delta} \quad (1.17)$$

Le mouvement résultant est donc une rotation $\vec{\Omega}$ accompagnée d'une translation \vec{V} dirigée suivant l'axe de cette rotation. Pour cette raison, l'axe X est appelé *axe de viration* ou *axe de vissage*.

1.3 Mouvement d'un plan sur un plan fixe

1.3.1 Centre instantané de rotation

Considérons un plan fixe p sur lequel se déplace un plan mobile P restant constamment en coïncidence avec lui. Nous supposons le mouvement tout à fait général et non pas une simple translation (figure 1.25).

À chaque instant, il existe un point I du plan mobile qui est tel que tout se passe comme si, à l'instant considéré, le plan mobile pivotait autour de ce point. Pour bien voir cette rotation instantanée autour de I , il suffit de partir d'un déplacement fini du plan mobile. Si A_0B_0 et A_1B_1 sont les positions d'un segment de droite tracé sur le plan mobile, aux instants t et $t + \Delta t$, il est facile de voir que l'on peut amener le plan P de la position (0) à la position (1) par une simple rotation autour d'un point J , intersection des perpendiculaires au milieu des segments A_0A_1 et B_0B_1 . En faisant tendre Δt vers zéro, on arrive ainsi à la notion de *rotation instantanée* autour du *centre instantané de rotation* I , limite du point J précédemment défini (figure 1.26).

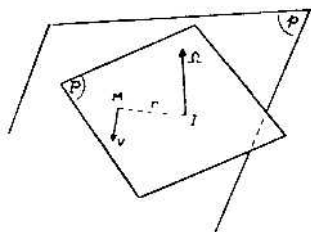


Figure 1.25 – Déplacement d'un plan mobile P sur un plan fixe p

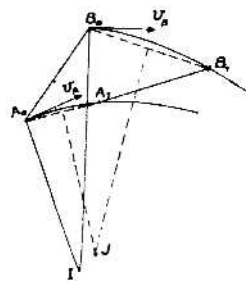


Figure 1.26 – Centre instantané de rotation

La rotation instantanée peut être représentée par un vecteur $\vec{\Omega}$, normal en I aux plans p et P .

À l'instant considéré, un point M quelconque du plan mobile a donc une vitesse \vec{v} dont le vecteur représentatif, situé dans le plan, est normal à la droite IM et a comme intensité :

$$|\vec{v}| = |\vec{\Omega}| \cdot IM \quad (1.18)$$

Le vecteur \vec{v} étant évidemment tangent à la trajectoire de M , nous remarquons que les normales à un instant donné aux trajectoires des points du plan mobile concourent toutes au centre instantané de rotation (figure 1.26).

1.3.2 Base et roulante du mouvement

Si à chaque instant nous repérons sur le plan mobile le point I , et si nous marquons avec une épingle le point i du plan fixe qui lui correspond, nous obtenons alors deux courbes :

- la courbe B , lieu des points i du plan fixe, est appelée la *base* du mouvement ;
- la courbe R , lieu des points I du plan mobile, est appelée la *roulante* du mouvement (figure 1.27).

On démontre la propriété importante suivante.

Pendant tout le mouvement de P sur p , la roulante R roule sans glisser sur la base B .

Imaginons un insecte qui, pendant le mouvement de P sur p , se déplace sur la courbe R de manière à se trouver à chaque instant sur la courbe B au point i . Sa trajectoire relative (sur le plan mobile) est la courbe R , et sa trajectoire absolue (par rapport au plan fixe) est la courbe B .

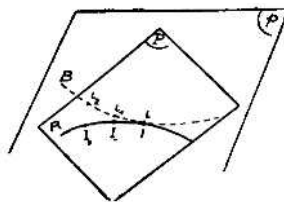


Figure 1.27 – Roulante et base

La vitesse absolue de l'insecte est représentée par un vecteur \vec{v}_a qui est tangent à la trajectoire absolue B . D'après le théorème sur la composition des vitesses, nous pouvons écrire :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

Écartons, pour plus de compréhension, le plan P du plan p . Séparons les trois mouvements fondamentaux (figure 1.28) :

- mouvement relatif de l'insecte (en coïncidence avec le point I) par rapport au plan mobile ;
- mouvement d'entraînement : du point I du plan mobile par rapport au point i du plan fixe ;
- mouvement absolu : du point I par rapport au plan fixe.

La vitesse relative est représentée par un vecteur \vec{v}_r tangent à la trajectoire de I sur le plan mobile, soit R .

La vitesse d'entraînement est nulle car c'est la vitesse du point I du plan mobile, centre instantané de rotation.

Nous avons donc $\vec{v}_r = \vec{v}_a$. Ces deux vecteurs ayant un point commun (I, i), ils sont confondus, ce qui montre que les courbes B et R sont bien tangentes ; elles roulent donc l'une sur l'autre (figure 1.29).