j'intègre

MP | MP*

T. Dugardin, M. Rezzouk

Exercices de mathématiques

Centrale-Supelec, Mines-Ponts, École Polytechnique et ENS

2E ÉDITION

DUNOD

Conception de couverture : Atelier 3+

5 rue Laromiguière, 75005 Paris
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-074905-8

Table des matières

Avant-propos

Cet ouvrage d'exercices corrigés de mathématiques s'adresse aux élèves de classes préparatoires scientifiques. Il est plus particulièrement adapté à la filière MP/MP* et conforme au nouveau programme officiel (rentrée 2014) de cette filière. Il pourra bien sûr également être utile aux élèves des autres filières et aux candidats aux concours d'enseignement (CAPES et Agrégation).

Les exercices sont d'un niveau relativement élevé et visent à préparer les concours les plus exigeants : Centrale–Supélec, Mines–Ponts, École Polytechnique et les Écoles Normales Supérieures.

Outre les exercices classiques incontournables, nous avons essayé de proposer quelques exercices plus originaux élaborés à partir de ce que nous avons pu proposer en tant qu'examinateurs à des concours aux grandes écoles.

Ils nous a semblé intéressant d'illustrer quelques exercices par une implémentation en langage Python conformément au programme d'informatique pour tous en vigueur depuis la rentrée 2013. Nous avons peu utilisé le calcul formel (module `sympy` ou logiciel `sage`) car celui-ci n'est plus – et c'est dommage – évalué au concours. Ces exercices sont systématiquement recensés dans l'index en fin de l'ouvrage.

Le chapitre portant sur les probabilités, thème nouvellement introduit en classes préparatoires scientifiques, est particulièrement développé mais compte tenu de la taille relativement restreinte de l'ouvrage, nous avons supposé que le lecteur s'était déjà familiarisé avec des exercices plus élémentaires d'appropriation du cours.

Notre source d'inspiration doit beaucoup à la Revue de Mathématiques Spéciales (RMS) qui constitue une aide précieuse pour tout élève ou professeur en classes préparatoires scientifiques.

Nous espérons que le lecteur trouvera de l'intérêt à la recherche de ces exercices et nous nous excusons par avance des éventuelles coquilles, omissions ou – pire – erreurs qui seraient encore présentes dans le texte.

Thierry Dugardin
Marc Rezzouk

Remerciements

Nous tenons à remercier Jean-Jacques Chauvin pour sa contribution précieuse, Alain Mansoux pour sa relecture bienveillante, ainsi que nos familles pour leur soutien et leur patience...

Chapitre 1
Dénombrabilité, combinatoire, probabilités

Ensembles dénombrables

Exercice 1.1 – Connexité par arcs et dénombrabilité

1) Soit $\mathcal{D}$ un ensemble dénombrable de points de $\mathbf{R}^2$. Montrer que $\mathbf{R}^2 \smallsetminus \mathcal{D}$ est connexe par arcs.

Indication : on pourra considérer la médiatrice de deux points distincts a et b de $\mathbf{R}^2 \smallsetminus \mathcal{D}$.

2) Montrer que l'espace $\mathbf{R}^3$ privé d'une réunion dénombrable de droites est connexe par arcs.

Indication : couper les droites par des sphères adéquates.

Solution

1) L'ensemble $\mathbf{R}^2 \smallsetminus \mathcal{D}$ n'est pas vide et même infini puisque $\mathbf{R}^2$ n'est pas dénombrable.
Soit $(a,b) \in \left(\mathbf{R}^2 \smallsetminus \mathcal{D}\right)^2$, $a \neq b$. On considère un point c mobile sur la médiatrice de $[a,b]$.
L'ensemble des points c pour lequel la ligne polygonale $[a,c,b]$ rencontre $\mathcal{D}$ est dénombrable (on construit une injection de cet ensemble vers $\mathcal{D}$ en choisissant un point de la ligne polygonale appartenant à $\mathcal{D}$), comme la médiatrice est une droite en bijection avec $\mathbf{R}$ qui n'est pas dénombrable, il existe des points c tel que la ligne polygonale $[a,c,b]$ ne rencontre pas $\mathcal{D}$. L'ensemble $\mathbf{R}^2 \smallsetminus \mathcal{D}$ est donc connexe par arcs.

2) Soit $\mathcal{D}'$ la réunion dénombrable de ces droites.
Considérons la sphère unité. Elle rencontre toute droite en au plus deux points donc elle rencontre $\mathcal{D}'$ en un nombre au plus dénombrable de points.
La sphère n'étant pas dénombrable, l'ensemble $\mathbf{R}^3 \smallsetminus \mathcal{D}'$ n'est pas vide et même infini.
Soit $(a,b) \in \left(\mathbf{R}^3 \smallsetminus \mathcal{D}'\right)^2$, $a \neq b$. Soit $\mathcal{S}$ la sphère de diamètre $[a,b]$.
Si $\mathcal{S}$ ne rencontre pas $\mathcal{D}'$ alors les points a et b sont reliés par un arc inclus dans la sphère.
Sinon, il existe $d \in \mathcal{S} \cap \mathcal{D}'$. On peut effectuer la projection stéréographique π [1] sur le plan tangent $\mathcal{T}$ à $\mathcal{S}$ au point diamétralement opposé à d. Alors $\mathcal{S} \smallsetminus \{d\}$ est homéomorphe à ce plan.
L'ensemble $\mathcal{S} \cap \mathcal{D}'$ est dénombrable (au plus deux points d'intersection par droites) donc $\left(\mathbf{R}^3 \smallsetminus \mathcal{D}'\right) \cap \mathcal{S}$ est homéomorphe par π à un plan privé d'un ensemble dénombrable de points

1. La projection est définie par $m \in \mathcal{S} \smallsetminus \{d\} \mapsto \pi(m) =$ le point d'intersection de la droite (dm) avec le plan.

qui d'après la question précédente est connexe par arcs. En composant par π^{-1}, on construit un chemin reliant les points a et b.

□

Exercice 1.2

On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des bijections de $\mathbf{N}$ sur lui-même.

1) Montrer que $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ n'est pas dénombrable (résultat dû à G. Cantor).

Indication On raisonnera par l'absurde en considérant Φ une bijection de $\mathbf{N}$ vers $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ et on considérera l'ensemble $\{x \in \mathbf{N} \mid x \in \Phi(x)\} \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$.

2) On considère l'application φ définie par

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbf{N}) \\ \sigma & \longmapsto & \{n \in \mathbf{N} \mid \sigma(n) = n\} = \mathrm{Fix}(\sigma). \end{array} \right.$$

Déterminer l'ensemble $\varphi(\mathcal{S})$.

3) Montrer que $\mathcal{S}$ n'est pas dénombrable.

Solution

1) Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble $\{x \in \mathbf{N} \mid x \notin \Phi(x)\} \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$.

Soit $a = \Phi^{-1}(\mathcal{A})$. On a deux possibilités, soit $a \in \Phi(a)$ donc $a \notin \mathcal{A} = \Phi(a)$, absurde ; soit $a \notin \Phi(a)$ donc $a \in \mathcal{A} = \Phi(a)$ encore absurde !

2) La clé de la réponse est simplement de réaliser qu'une bijection de $\mathbf{N}$ ne peut pas fixer tous les éléments sauf un mais que tout ensemble dénombrable fini ou non ayant au moins deux éléments admet une permutation sur lui-même sans point fixe.

$\mathbf{N}$ est l'image par φ de $\mathrm{id}_{\mathbf{N}}$. Soit $\mathrm{E} \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$ tel que $\mathbf{N} \setminus \mathrm{E}$ ait au moins deux éléments. En distinguant suivant le caractère fini ou non de $\mathbf{N} \setminus \mathrm{E}$, on construit grâce à la remarque précédente une permutation σ tel que $\varphi(\sigma) = \mathrm{E}$.

En conclusion, $\varphi(\mathcal{S}) = \mathcal{P}(\mathbf{N}) \setminus \{\text{les complémentaires des singletons}\}$.

3) Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathcal{S}$ est dénombrable.

Alors $\varphi(\mathcal{S}) = \mathcal{P}(\mathbf{N}) \setminus \{\text{les complémentaires des singletons}\}$ serait dénombrable.

Comme l'ensemble $\{\text{les complémentaires des singletons}\}$ est dénombrable, on aurait $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ dénombrable, absurde !

□

Exercice 1.3 – Tribu générée par une partition dénombrable

Soit $\mathcal{F} = \{\mathrm{F}_n, n \in \mathbf{N}\}$ une partition dénombrable (infinie) d'un ensemble A. Décrire la plus petite tribu $\mathcal{T}$ contenant $\mathcal{F}$. Cette tribu est-elle dénombrable ?

Solution On montre facilement que $\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{n \in \mathrm{N}} \mathrm{F}_n \mid \mathrm{N} \subset \mathbf{N} \right\}$ qui est en bijection naturelle (grâce à la partition) avec $\mathcal{P}(\mathbf{N})$. On sait depuis Cantor (procédé diagonal) que ce dernier n'est pas dénombrable. □

Exercice 1.4 – Une tribu dénombrable est forcément finie

Soit $\mathcal{T}$ une tribu supposée dénombrable sur un ensemble E.
Montrons que $\mathcal{T}$ est fini.

1) Soit $a \in \mathrm{E}$, montrer que $\mathrm{C}(a) = \bigcap_{a \in \mathrm{A} \in \mathcal{T}} \mathrm{A} \in \mathcal{T}$.

2) Montrer que la relation sur E définie par $a \sim b \Leftrightarrow b \in \mathrm{C}(a)$ est une relation d'équivalence et donner les classes d'équivalence.

3) Montrer que la plus petite tribu contenant $\mathcal{P} = \{\mathrm{C}(a), a \in \mathrm{E}\}$ est $\mathcal{T}$ et montrer en utilisant l'exercice précédent que E est de cardinal fini.

SOLUTION

1) On sait qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathcal{T}$ tel que $a \in \mathrm{A}$ (prendre E), de plus $\mathcal{T}$ étant dénombrable, l'intersection définissant l'ensemble $\mathrm{C}(a)$ est dénombrable donc $\mathrm{C}(a) \in \mathcal{T}$.

2) Soit $b \in \mathrm{C}(a)$. Comme $b \in \mathrm{C}(a) \in \mathcal{T}$, $\mathrm{C}(a) \subset \mathrm{C}(b)$ par définition de $\mathrm{C}(b)$.

Mais $a \in \mathrm{C}(a)$ donc $a \in \mathrm{C}(b)$ donc de même $\mathrm{C}(b) \subset \mathrm{C}(a)$.

Finalement, on a $a \sim b \Leftrightarrow \mathrm{C}(a) = \mathrm{C}(b)$ ce qui définit immédiatement une relation réflexive, symétrique et transitive.

Cherchons la classe d'équivalence de a, $cl(a) = \{b \mid b \sim a\}$.

Puisque $b \in \mathrm{C}(a)$, $cl(a) \subset \mathrm{C}(a)$, réciproquement si $b \in \mathrm{C}(a)$ alors on a vu que $a \in \mathrm{C}(b)$ donc $a \sim b$ donc $b \in cl(a)$.

CONCLUSION les classes d'équivalence sont précisément les ensembles $\mathrm{C}(a)$, $a \in \mathrm{E}$.

3) L'ensemble $\{\mathrm{C}(a), a \in \mathrm{E}\}$ constitue une partition de E, dénombrable car tous les ensembles $\mathrm{C}(a)$ appartiennent à $\mathcal{T}$ et que la tribu $\mathcal{T}$ est supposée dénombrable.

Notons $\sigma(\mathcal{P})$ cette plus petite tribu dont une description est donnée dans l'exercice précédent. Il est clair que $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{T}$.

Réciproquement, soit un élément A de la tribu $\mathcal{T}$.

Remarquons que d'après la question précédente, $\mathrm{A} = \bigcup_{a \in \mathrm{A}} \mathrm{C}(a)$, en effet si $a \in \mathrm{A} \subset \mathcal{T}$ alors $a \in \mathrm{C}(a) \subset \mathrm{A}$ et l'inclusion réciproque est évidente. On en déduit que $\mathcal{T} \subset \sigma(\mathcal{P})$.

CONCLUSION $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{T}$. Si la tribu $\mathcal{T}$ était dénombrable de cardinal infini alors la partition $\mathcal{P}$ le serait également, l'exercice précédent nous montre que la tribu $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{P})$ ne pourrait alors plus être dénombrable, contradiction.

Remarque Les tribus non finies sont en général très difficiles à décrire, l'exemple de l'exercice précédent est très particulier et ne représente pas les tribus que l'on rencontre généralement en probabilités plus avancées. Une tribu typique est celle des boréliens de **R** générée par les intervalles ouverts réels. On ne sait pas décrire simplement cette tribu mais elle est indispensable pour construire des variables aléatoires continues sur **R**. Dans le cadre de notre programme, la construction d'une famille de variables aléatoires discrètes (même finies) $(\mathrm{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ indépendantes nécessite d'utiliser une tribu non dénombrable. □

Combinatoire, probabilités

Exercice 1.5 – Poker – révisions sur le dénombrement – `Python`

Révisons un peu les techniques élémentaires de dénombrement.
Dans le cadre du jeu de poker, on tire une main (5 cartes) dans un jeu de 52 cartes. On rappelle qu'une carte se définit par sa hauteur (13 possibilités) et sa couleurs (4 possibilités).

1) Réaliser un programme en `Python` qui crée une main aléatoire.
Indication on pourra utiliser la fonction `shuffle` (ou éventuellement `choice`) du module `random`.

2) Déterminer la probabilité d'obtenir (il est sous-entendu que la combinaison est la meilleure obtenue)

a) une paire (exactement)

b) deux paires (exactement)

c) un brelan (trois cartes de même rang)

d) une suite (cinq cartes de rang consécutif)

e) une couleur (5 cartes de la même couleur)

f) un full (un brelan et une paire)

g) un carré

h) une suite royale (=quinte flush, 5 cartes de rang successif et de même couleur).

i) Une main avec au moins un pique et un as.

3) Effectuer un test statistique élémentaire de vos réponses : la fréquence des résultats pour un nombre de tirages « grand » doit être proche du résultat théorique.

4) Soit $\mathcal{A}$ l'événement dont on veut mesurer la probabilité. On effectue N essais indépendants et on note $X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{A} \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ à la n^e étape.

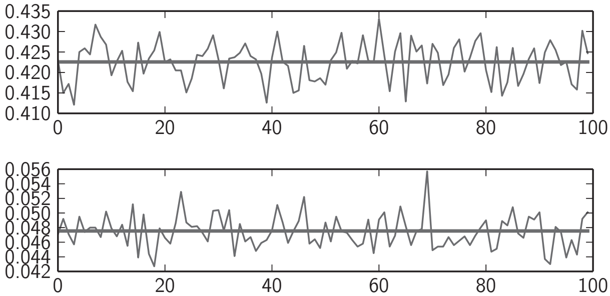
Rappeler pourquoi $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{N} X_k}{N} - \mathbb{P}(\mathcal{A})\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \dfrac{\sigma^2}{N\varepsilon^2}$ où $\sigma^2 = \operatorname{var}(X_1)$.

Comment choisir N pour avoir, avec un risque inférieur à 5%, une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathbb{P}(\mathcal{A})$?

Solution

1) (et **3)**). Voici le programme `Python`, on effectue 100 tests d'échantillons de 10000 tirages (valeur empirique pour l'instant) et on représente les moyennes qui devraient ne pas être trop loin de la mesure théorique...

```
import random as r
import matplotlib.pyplot as plt

VALET, DAME, ROI = 11, 12, 13
CARREAU, COEUR, PIQUE, TREFLE = 0, 1, 2, 3

HAUTEURS = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, VALET, DAME, ROI)
COULEURS = (CARREAU, COEUR, PIQUE, TREFLE)

JEU = [(h, c) for h in HAUTEURS for c in COULEURS]


def cptpaire(main):
    "renvoie le nombre de paires exactes"
    cpt = 0
    # liste des hauteurs de la main
    htmain = [carte[0] for carte in main]

    for ht in HAUTEURS:
        nb = htmain.count(ht)
        if nb == 3:
            return 0  # un brelan est présent
        elif nb == 2:
            cpt += 1
            if cpt == 2:  # pour accélérer
                return cpt
    return(cpt)


def compte_paires(nb, N, jeu):
    p = 0
    for i in range(N):
        r.shuffle(jeu)  # c'est là que s'effectue le tirage d'une main
        main = [jeu[j] for j in range(5)]
        c = cptpaire(main)
        if c == nb:
            p += 1
    return p/N


N = 10000  # échantillons de N mains tirées au hasard
n = 100  # nb de tests

plt.figure(figsize=(5, 2.5))
plt.figure(1)
plt.subplot(211)
L = [compte_paires(1, N, JEU) for k in range(n)]
plt.plot(range(n), L, 'g', linewidth=1.0)
plt.plot([0, n-1], [352/833, 352/833], 'r', linewidth=2.0)

plt.subplot(212)
L = [compte_paires(2, N, JEU) for k in range(n)]
plt.plot(range(n), L, 'g', linewidth=1.0)
plt.plot([0, n-1], [198/4165, 198/4165], 'r', linewidth=2.0)

plt.tight_layout(pad=0.4, w_pad=0.5, h_pad=1.0) # un peu d'espace
plt.show()
```



2) Le nombre de mains est $\binom{52}{5} = 2598\,960$ mains.

a) On choisit la hauteur de la paire 13 possibilités, les deux couleurs de la paire $\binom{4}{2} = 6$, trois cartes pour compléter mais qui ne sont pas de même hauteur à savoir 3 hauteurs parmi 12 possibles et leur couleur 4^3.
Cela donne $13 \times 6 \times \binom{12}{3} \times 4^3 = 1098\,240$ possibilités,
d'où une probabilité de $\dfrac{1098\,240}{\binom{52}{5}} = \dfrac{352}{833} \approx 0,42$.

b) On choisit les deux hauteurs des paires $\binom{13}{2}$, les paires de couleurs $\binom{4}{2} \times \binom{4}{2}$, puis on complète avec une carte d'une autre hauteur $52 - 8 = 44$, soit au total
$\binom{13}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times 44 = 123\,552$, d'où une probabilité de $\dfrac{123\,552}{\binom{52}{5}} = \dfrac{198}{4165} \approx 0,047$.

c) On choisit la hauteur 13, les 3 couleurs des trois cartes $\binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4$ et les deux autres cartes 2 hauteurs parmi 12 et leur couleur 4^2.
Au total, $13 \times 4 \times \binom{12}{2} \times 4^2 = 54\,912$, d'où une probabilité de $\dfrac{54\,912}{\binom{52}{5}} = \dfrac{88}{4165} \approx 0,021$.

d) On choisit la hauteur de la plus haute carte, $13 - 4 = 9$ possibilités puis on choisit les couleurs $4^5 - 4$ car il faut retirer les 4 suites royales.
Au total, $9 \times \left(4^5 - 4\right) = 9180$, d'où une probabilité de $\dfrac{9180}{\binom{52}{5}} = \dfrac{9}{2548} \approx 0,0035$.

e) On choisit la couleur, 4 et les 5 hauteurs $\binom{13}{5}$, mais attention à retirer les suites royales $13 - 5 + 1 = 9$, au total $4 \times \left(\binom{13}{5} - 9\right) = 5112$,
d'où une probabilité de $\dfrac{5112}{\binom{52}{5}} = \dfrac{213}{108\,290} \approx 0,0019$.

f) On choisit la hauteur du brelan 13, celui de la paire 12, les couleurs pour le brelan 4, les couleurs pour la paire $\binom{4}{2} = 6$, soit au total $13 \times 12 \times 4 \times 6 = 3744$,
d'où une probabilité de $\dfrac{3744}{\binom{52}{5}} = \dfrac{6}{4165} \approx 0,0014$.

g) On choisit la hauteur du carré 13 puis la cinquième carte $52 - 4 = 48$,
au total $13 \times 48 = 624$ carrés, d'où une probabilité de $\dfrac{624}{\binom{52}{5}} = \dfrac{1}{4165} \approx 0,00024$

h) Il n'y a que $4 \times (13 - 5 + 1) = 36$ possibilités,
d'où une probabilité de $\dfrac{36}{\binom{52}{5}} = \dfrac{3}{216\,580} \approx 0,000014$.

i) On écrit

$$\begin{aligned}&\text{card}\,(\{\text{pas d'as}\} \cup \{\text{pas de pique}\})\\&= \text{card}\,(\{\text{pas d'as}\}) + \text{card}\,(\{\text{pas de pique}\}) - \text{card}\,(\{\text{pas d'as}\} \cap \{\text{pas de pique}\})\\&= \binom{48}{5} + \binom{39}{5} - \binom{36}{5} = 1911\,069\end{aligned}$$

D'où card ({au moins un as} ∩ {au moins un pique}) $= \binom{52}{5} - 1911\,069 = 687\,891$, d'où une probabilité de $\dfrac{687\,891}{\binom{52}{5}} = \dfrac{229\,297}{866\,320} \approx 0,26$.

3) Voir la question **1)**.

4) Remarquons que pour tout k, $\mathbb{E}\,(\mathrm{X}_k) = \mathbb{P}\,(\mathcal{A})$. On sait d'après le cours (inégalité de Bienaymé-Tchebychev) que $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} (\mathrm{X}_k - \mathbb{E}\,(\mathrm{X}_k))}{\mathrm{N}}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{\text{var}\,(\mathrm{X}_1)}{\mathrm{N}\varepsilon^2} = \dfrac{\sigma^2}{\mathrm{N}\varepsilon^2}$,

qui permet d'établir la loi faible des grands nombres, d'où le résultat.

Comme ici $|\mathrm{X}_k - \mathbb{E}\,(\mathrm{X}_k)| \leqslant 1$, on a $\sigma^2 \leqslant 1$ donc $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}_k}{\mathrm{N}} - \mathbb{P}\,(\mathcal{A})\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \dfrac{1}{\mathrm{N}\varepsilon^2}$.

Si l'on veut $1 - \dfrac{1}{\mathrm{N}\varepsilon^2} \geqslant 1 - \dfrac{5}{100}$ avec $\varepsilon = 10^{-2}$, cela donne $\mathrm{N} \geqslant \dfrac{20}{\varepsilon^2} = 200\ 000$, ce qui est assez conséquent pour notre programme `Python`...

Remarque On peut améliorer notre inégalité en utilisant un résultat hors-programme en classes préparatoires mais entrevu en classe de Terminale : le théorème de la limite centrale.

On montre que $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}_k}{\mathrm{N}} - \mathbb{P}\,(\mathcal{A})\right| < \dfrac{a \cdot \sigma}{\sqrt{\mathrm{N}}}\right) \underset{\mathrm{N}\ \text{« grand »}}{\approx} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$.

(l'approximation est contrôlable par l'inégalité de Berry-Esséen).

Ici pour $a \approx 1,96$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \leqslant 0,95$.

On peut donc prendre $\mathrm{N} \geqslant \dfrac{a^2}{\varepsilon^2} \approx 38\ 415 \left(\geqslant \dfrac{a^2 \cdot \sigma^2}{\varepsilon^2}\right)$ pour avoir $\dfrac{a \cdot \sigma}{\sqrt{\mathrm{N}}} \leqslant \varepsilon = 10^{-2}$.

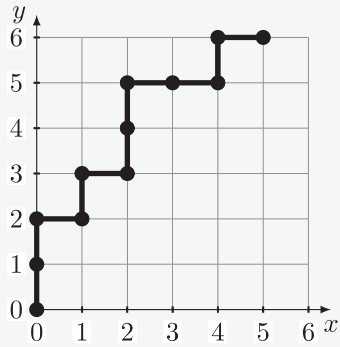
$\mathrm{N} = 40\ 000$ serait donc suffisant...

□

Exercice 1.6 – Chemins Nord et Est, problème du scrutin

On se place dans le plan euclidien canonique $\mathbf{R}^2$ et on choisit un couple (p, q) d'entiers naturels $\geqslant 1$. On appellera chemin une suite de points $(\mathrm{M}_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ à coordonnées entières telle que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ $\overrightarrow{\mathrm{M}_k\mathrm{M}_{k+1}} \in \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$.
On s'intéresse aux chemins joignant l'origine O au point de coordonnées (p, q).

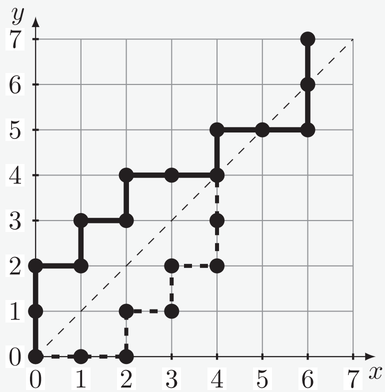
Voici un exemple.



1) Dénombrer le nombre de chemins possibles joignant l'origine O au point (p, q).

2) On suppose que $q > p$.
On cherche à dénombrer le nombre de chemins joignant l'origine au point (p, q) en restant toujours strictement au-dessus de la première bissectrice (sauf en l'origine bien sûr).

a) Montrer que le nombre de chemins joignant $(0, 1)$ au point (p, q) et coupant la première bissectrice est égal au nombre de chemins joignant $(1, 0)$ au point (p, q).
Indication s'inspirer de la figure suivante (penser à une symétrie)



b) On choisit au hasard (de façon équiprobable) un chemin joignant l'origine au point (p, q), montrer que la probabilité que ce chemin ne **coupe** pas la première bissectrice (sauf en l'origine) vaut $\dfrac{q-p}{q+p}$.
Ce résultat possède une formulation amusante : on imagine le **dépouillement d'un scrutin** du second tour où deux candidats se sont affrontés. Le candidat gagnant a remporté q voix, le perdant p. En supposant les bulletins répartis de façon équiprobable dans l'urne, la probabilité qu'à chaque étape du dépouillement ce candidat soit en avance de voix (au sens large) est de $\dfrac{q-p}{q+p}$.

3) On suppose que $q \geqslant p$.
On choisit au hasard (de façon équiprobable) un chemin joignant l'origine au point (p, q), montrer que la probabilité que ce chemin ne **traverse pas** la première bissectrice vaut $1 - \dfrac{p}{q+1}$.

Solution

1) On a une bijection naturelle entre les chemins demandés et les mots de longueur $p + q$ écrit avec les lettres `N` et `E` (pour nord et est). Par exemple, le chemin de l'énoncé s'écrit `NNENENNEENE`. Pour construire de tels mots, on choisit parmi les $p+q$ emplacements (= déplacements), les p emplacements correspondant à la lettre E (est). On a donc $\binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q}$ chemins possibles.

2) a) Pour tout chemin joignant $(0, 1)$ au point (p, q) et coupant la première bissectrice, on lui associe son « symétrique partiel » par rapport à la première bissectrice, en effectuant la transformation illustrée dans l'énoncé. On considère le premier point du chemin sur la première bissectrice et on symétrise la première partie en gardant intacte la seconde partie du chemin. On obtient un chemin joignant $(1, 0)$ à (p, q).

On se convainc que cette transformation établit une bijection entre les chemins de l'énoncé et ceux joignant $(1, 0)$ à (p, q).

(comme $q > p$, ces derniers coupent nécessairement la première bissectrice).

b) Les chemins strictement au-dessus de la première bissectrice commencent tous par un déplacement nord et passe donc par le point $(0, 1)$. Leur nombre $\mathcal{N}$ correspond au nombre de chemins joignant $(0, 1)$ à (p, q) qui ne coupent pas la première bissectrice.

Ainsi, en désignant par $(a, b) \rightsquigarrow (p, q)$ l'ensemble des chemins joignant le point (a, b) au point (p, q),

$$\mathcal{N} = \mathrm{card}((0,1) \rightsquigarrow (p,q)) - \mathrm{card}((1,0) \rightsquigarrow (p,q)) \text{ (grâce à la question } \mathbf{2)a)}\text{)}.$$

Par translation, $\mathcal{N} = \mathrm{card}((0,0) \rightsquigarrow (p, q-1)) - \mathrm{card}((0,0) \rightsquigarrow (p-1, q)) = \binom{p+q-1}{p} - \binom{p+q-1}{p-1}$.

Conclusion

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= \binom{p+q-1}{p} - \binom{p+q-1}{p-1} = \frac{(p+q-1)!}{(p-1)!(q-1)!}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \\ &= \frac{(p+q-1)!(q-p)}{p!q!} = \frac{q-p}{p+q}\binom{p+q}{p}.\end{aligned}$$

On trouve $\frac{q-p}{q+p}\binom{p+q}{p}$ chemins valables parmi les $\binom{p+q}{p}$ possibles, d'où la probabilité annoncée.

3) Le nombre de chemins $\mathcal{N}'$ au dessus de la première bissectrice au sens large est égal aux chemins joignant $(0, -1)$ à (p, q) en étant strictement au dessus de la droite $y = x - 1$.

Par translation, c'est le nombre précédent où l'on remplace q par $q + 1$.

Ainsi, $\mathcal{N}' = \dfrac{q-p+1}{p+q+1}\binom{p+q+1}{p}$. On calcule alors la probabilité

$$\frac{\frac{q-p+1}{p+q+1}\binom{p+q+1}{p}}{\binom{p+q}{p}} = \frac{q-p+1}{p+q+1}\,\frac{p+q+1}{q+1} = \boxed{1 - \frac{p}{q+1}.}$$

□

Exercice 1.7 – Marche aléatoire sur Z – `Python`

On peut reprendre les résultats de l'exercice précédent pour étudier la marche aléatoire sur $\mathbf{Z}$.
On imagine un objet, une puce par exemple, se déplaçant sur les entiers relatifs partant de l'origine et se déplaçant d'un pas à gauche ou à droite de façon équiprobable.

1) Quelle est la probabilité $\mathbb{P}_n$ que la puce revienne à l'origine en $2n$ étapes ?

2) En réinterprétant les chemins de l'exercice précédent, montrer que la probabilité que la puce revienne à l'origine pour la première fois en $2n$ étapes est de $\dfrac{1}{2^{2n-1}}\dfrac{1}{2n-1}\binom{2n-1}{n}$.

3) Modélisons la marche aléatoire de la puce avec des variables aléatoires. Soient (X_n) des variables aléatoires indépendantes de même loi avec

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = 1) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Notons $\mathrm{S}_0 = 0$ et $\mathrm{S}_n = \mathrm{S}_0 + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$ la position de la puce à la n^e étape.

a) Expliquer pourquoi la probabilité $\mathbb{P}\left\{\forall i \geqslant n+1,\ \sum_{k=n+1}^{i} \mathrm{X}_k \neq 0\right\}$ ne dépend pas de n.

b) Déterminer un équivalent de $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n} = 0)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}_n$.

c) Montrer que la probabilité pour que la puce ne passe qu'un nombre fini de fois par l'origine est donnée par la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left\{\mathrm{S}_{2n} = 0 \text{ et } \left(\forall i \geqslant 2n+1,\ \sum_{k=2n+1}^{i} \mathrm{X}_k \neq 0\right)\right\}.$$

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbb{P}\left\{\forall i \geqslant 2n+1,\ \sum_{k=2n+1}^{i} \mathrm{X}_k \neq 0\right\} = 0$ et en déduire que la puce retourne presque sûrement une infinité de fois à l'origine.

e) Que penser de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{2n-1}} \dfrac{1}{2n-1} \binom{2n-1}{n}$?

4) Créer un programme en `Python` permettant de visualiser cette marche aléatoire :
- représenter les chemins sous la forme de lignes polygonales $(n, \mathrm{S}_n(\omega))$
- visualiser la distribution statistique du temps de premier retour à l'origine et comparer graphiquement avec la formule théorique obtenue.

Indication la fonction `comb` du module `scipy.misc` calcule les combinaisons de Pascal et la fonction `randint` du module `random` (ou de `numpy` mais attention elle est légèrement différente) produit des nombres entiers aléatoires.

Solution

1) On compte le nombre de chemins pour aller de $(0,0)$ à (n,n), on a vu qu'il y en $\binom{2n}{n}$ d'où la probabilité $\mathbb{P}_n = 2^{-2n}\binom{2n}{n}$.

2) Dans l'exercice précédent un chemin pouvait être codé par un mot écrit avec les lettres `N` et `E` (pour nord et est), il suffit de remplacer `N` par `D` (droite) et `E` par `G` (gauche) pour coder un déplacement fini de la puce.

Graphiquement, les chemins précédents correspondent à un retour à l'origine quand l'extrémité est sur la première bissectrice.

Le temps de premier retour en $2n$ étapes, $n \geqslant 1$.

Dénombrons tous les chemins de longueur $2n$ strictement au dessus de la première bissectrice sauf au début (origine) et à l'extrémité (n,n).

D'après l'exercice précédent,

il y en a $\mathrm{card}\left((0,1) \overset{\text{strict}}{\rightsquigarrow} (n-1,n)\right) = \dfrac{q-p}{p+q}\binom{p+q}{p} = \dfrac{1}{2n-1}\binom{2n-1}{n-1} = \dfrac{1}{2n-1}\binom{2n-1}{n}$ avec $p = n-1$ et $q = n$.

Ces chemins correspondent à une marche aléatoire de la puce avec un premier retour en n en commençant **son premier déplacement à droite de l'origine.**

Il y a autant de chemins en commençant à se déplacer à gauche de l'origine (ce qui correspond à une symétrie par rapport à la première bissectrice avec notre modèle précédent). Le nombre de chemins vaut 2^{2n} d'où la probabilité de

$$\frac{\dfrac{2}{2n-1}\binom{2n-1}{n}}{2^{2n}} = \boxed{\frac{1}{2^{2n-1}}\frac{1}{2n-1}\binom{2n-1}{n}.}$$

3) a) Toutes les variables aléatoires étant indépendantes et de même loi, cette probabilité ne dépend pas de n – l'information en termes de loi est la même pour $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \cdots)$ que pour $(\mathrm{X}_{n+1}, \mathrm{X}_{n+2}, \cdots)$.

b) Ainsi, avec l'équivalent de Stirling,

$$\mathbb{P}_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^{2n}}\frac{\sqrt{2\pi 2n}}{2\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\left(\frac{e}{n}\right)^{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\mathbb{P}_n$ est donc divergente.

c) On partitionne l'événement $\mathcal{A} =$« la puce ne passe qu'un nombre fini de fois par l'origine » par le dernier passage à l'origine,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \bigcup_{n=0} \{\mathrm{S}_{2n} = 0 \text{ et } (\forall i \geqslant 2n+1,\ \mathrm{S}_i \neq 0)\} \\ &= \bigcup_{n=0}\left\{\mathrm{S}_{2n} = 0 \text{ et } \left(\forall i \geqslant 2n+1,\ \sum_{k=2n+1}^{i}\mathrm{X}_k \neq 0\right)\right\}.\end{aligned}$$

d) Notons $q = \mathbb{P}\left\{\forall i \geqslant 2n+1,\ \sum\limits_{k=2n+1}^{i}\mathrm{X}_k \neq 0\right\}$. Rappellons que d'après la question **3)a)**, le nombre q ne dépend pas de n. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{A}) &\underset{\text{partition}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\{\mathrm{S}_{2n} = 0 \text{ et } (\forall i \geqslant 2n+1,\ \mathrm{S}_i \neq 0)\} \\
&\underset{\text{par indépendance}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n} = 0)\,\mathbb{P}(\forall i \geqslant 2n+1,\ \mathrm{S}_i \neq 0) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} q\mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n} = 0).
\end{aligned}$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n} = 0)$ étant divergente, nécessairement $q = 0$.

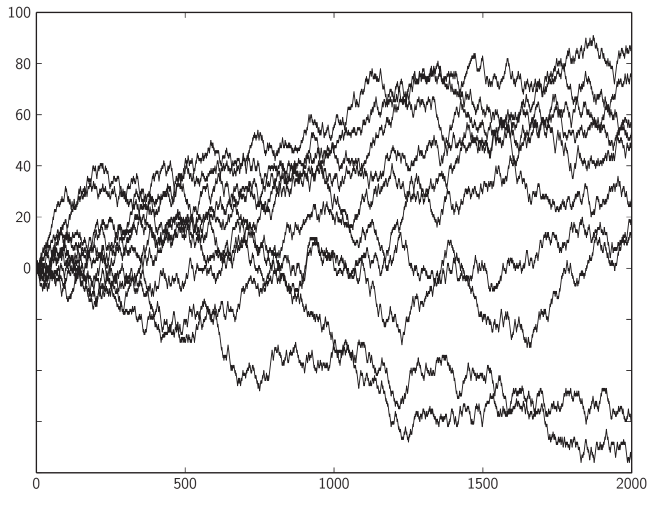
On a donc $\mathbb{P}(\Omega \setminus \mathcal{A}) = 1 = \mathbb{P}\{\text{la puce revient une infinité de fois à l'origine}\}$.

e) En particulier $\Omega \setminus \mathcal{A} \subset \bigcup_{n\geqslant 1} \{\text{la puce revient pour la première fois en } 2n\}$

En passant aux probabilités, il vient

$$1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n-1}} \frac{1}{2n-1} \binom{2n-1}{n}$$

Voici le graphique obtenu

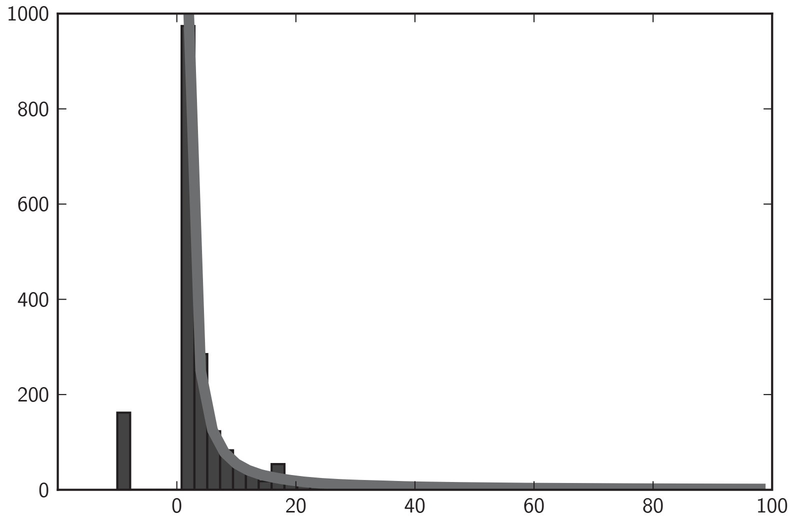


avec le programme `Python` suivant permettant de visualiser différentes marches aléatoires

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
def marche1d(N):
    L = np.zeros(N)
    for i in range(1, N):
        L[i] = L[i-1] + (2 * np.random.randint(0, 2) - 1)
    return L

for i in range(10):
    L = marche1d(2000)
    plt.plot(L, 'k', linewidth=0.7)

plt.show()
```

Pour la distribution du temps de premier retour, voici le graphique obtenu



avec le programme `Python`

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.misc import comb  # combinaisons de Pascal

def tpsretour1d(N):
    x = 0
    for i in range(1, N):
        dep = np.random.randint(2)
        if dep == 0:
            x += 1
        else:
            x += -1
        if x == 0:
            return i
    return -10

N = 2000
nbmax = 100
test = np.array([tpsretour1d(nbmax) for i in range(N)])
```

```
plt.hist(test, bins=50)

# théoriquement P(T=2k)=1/(2k-1)*(1/2**(2k-1))*comb(2k-1, k)
L = np.array([1/(2*k-1) * comb(2*k-1, k) * N / 2**(2*k-1)
              for k in range(1, nbmax // 2)])
plt.plot(range(2, nbmax, 2), L, 'r', lw=5)
plt.show()
print('% de non retour :', len(test[test < 0]) / N)
```

qui donne `% de non retour : 0.0765`

□

Exercice 1.8 – Marche aléatoire (suite) dans $\mathbf{Z}^2$

On s'intéresse maintenant au saut d'une puce à partir de l'origine dans $\mathbf{Z}^2$. Soient $D_n = (X_n, Y_n)$ des vecteurs aléatoires indépendants de même loi avec

$$\mathbb{P}(D_n = (1,0)) = \mathbb{P}(D_n = (-1,0)) = \mathbb{P}(D_n = (0,1)) = \mathbb{P}(D_n = (0,-1)) = \frac{1}{4}.$$

1) Les variables aléatoires X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?

2) On pose $U_n = X_n + Y_n$ et $V_n = X_n - Y_n$. Montrer que les variables aléatoires U_n et V_n sont indépendantes.

3) Notons $S_0 = (0,0)$ et $S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} D_k \in \mathbf{Z}^2$ la position de la puce à la n^e étape. Montrer que $\mathbb{E}(\|D_n\|) \leqslant \sqrt{n}$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

4) Cette question reprend les idées de l'exercice 1.7 p. 10.

Déterminer $\mathbb{P}(S_{2n} = (0,0))$, étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(S_{2n} = (0,0))$ et en déduire que la puce revient presque sûrement une infinité de fois à l'origine.

Solution

1) Non, elles ne sont pas indépendantes, par exemple

$$\mathbb{P}(X_1 = 1 \text{ et } Y_1 = 1) = \mathbb{P}(D_1 = (1,1)) = 0 \neq \mathbb{P}(X_1 = 1)\,\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \frac{1}{4^2}.$$

2) En revanche (U_n, V_n) sont indépendantes, en effet

$\mathbb{P}(U_n = 1) = \mathbb{P}(U_n = -1) = \mathbb{P}(V_n = 1) = \mathbb{P}(V_n = -1) = \frac{1}{2}$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((U_n, V_n) = (1,1)) &= \mathbb{P}((U_n, V_n) = (-1,-1)) \\ &= \mathbb{P}((U_n, V_n) = (-1,1)) = \mathbb{P}((U_n, V_n) = (1,-1)) = \frac{1}{4},\end{aligned}$$

on peut même préciser que les variables aléatoires U_n et V_n ont même loi.

3) Notons $\mathrm{D}_n = (\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k, \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_k\right)$. en utilisant la concavité de $x \mapsto \sqrt{x}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sqrt{\mathrm{A}_n^2 + \mathrm{B}_n^2}\right) &\leqslant \sqrt{\mathbb{E}\left(\mathrm{A}_n^2 + \mathrm{B}_n^2\right)} \leqslant \sqrt{\mathbb{E}\left(\mathrm{A}_n^2\right) + \mathbb{E}\left(\mathrm{B}_n^2\right)} \\
&\leqslant \sqrt{\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k\right)^2\right) + \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_k\right)^2\right)} \\
&\leqslant \sqrt{2\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k^2\right)} \text{ car } \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_k\right) = 0 \text{ et } \mathrm{X}_k, \mathrm{Y}_k \text{ de même loi} \\
&\leqslant \sqrt{2n\mathbb{E}\left(\mathrm{X}_1^2\right)} = \sqrt{n} \text{ car } \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_1^2\right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

4) On a $\mathrm{S}_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k, \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_k\right)$ et comme $\mathrm{X}_n = \frac{1}{2}\left(\mathrm{U}_n + \mathrm{V}_n\right)$ et $\mathrm{Y}_n = \frac{1}{2}\left(\mathrm{U}_n - \mathrm{V}_n\right)$,

$\mathrm{S}_n = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{U}_k\right)(1,1) + \left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{V}_k\right)(1,-1)\right)$ (on effectue un changement de base).

En particulier,

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{2n} = (0,0)\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{2n} \mathrm{U}_k = 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{2n} \mathrm{V}_k = 0\right)$$

$$\underset{\text{indép.}}{=} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{2n} \mathrm{U}_k = 0\right) \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{2n} \mathrm{V}_k = 0\right) = \left(\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{2n} \mathrm{U}_k = 0\right)\right)^2.$$

La dernière probabilité correspond à la marche aléatoire unidimensionnelle de l'exercice 1.7 p. 10 précédent.

On a donc $\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{2n} = (0,0)\right) = \left(2^{-2n}\binom{2n}{n}\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)^2 = \frac{1}{\pi n}$.

De nouveau la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{2n} = (0,0)\right)$ est divergente, on peut alors reprendre le raisonnement de l'exercice précédent en remplaçant la condition $\sum_{k=2n+1}^{i} \mathrm{X}_k \neq 0$ par

$\left(\sum_{k=2n+1}^{i} \mathrm{X}_k, \sum_{k=2n+1}^{i} \mathrm{Y}_k\right) \neq (0,0)$ et $\mathrm{S}_{2n} = 0$ par $\mathrm{S}_{2n} = (0,0)$...

□

Exercice 1.9 – Queue de distribution d'une loi binomiale

Soit $p \in]0,1[$. On considère une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p. Pour $n \geqslant 1$, on pose $\overline{\mathrm{X}}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$.

1) Soit $\alpha \in]0,1[$, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer un intervalle $[p-u_n, p+u_n]$ (appelé intervalle de confiance) tel que pour n assez grand,

$$\mathbb{P}\left(\overline{\mathrm{X}}_n \in [p-u_n, p+u_n]\right) \geqslant 1-\alpha.$$

2) Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbf{R}^+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{(px+1-p)^2} \end{cases}$. Déterminer $\sup\limits_{\mathbf{R}^+} \varphi$.

3) Montrer en étudiant la dérivée seconde d'une fonction que pour $t \geqslant 0$, $\mathbb{E}\left(\exp(t(\mathrm{X}_1 - p))\right) \leqslant \exp\left(\dfrac{t^2}{8}\right)$.

4) En déduire que pour tout $t \geqslant 0$ et tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\overline{\mathrm{X}}_n - p \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \exp\left(-\varepsilon t + \frac{t^2}{8n}\right).$$

Montrer alors que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\overline{\mathrm{X}}_n - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\exp\left(-2n\varepsilon^2\right)$.

5) Proposer une amélioration de l'intervalle de confiance de la première question (pour α proche de 0).

6) Application du résultat de la question 4).

On pose pour $n \geqslant 2$, $\mathrm{A}_n = n\sqrt{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \dfrac{1}{k\sqrt{n-k}}$.

On se propose d'étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n$. Pour cela, on définit la fonction

$$f : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{1-x}} \text{ pour } x \in]0,1[\\ 0 \text{ pour } x \in \{0,1\}. \end{cases} \end{cases}$$

a) Exprimer A_n en fonction de f et $\overline{\mathrm{X}}_n$.

b) Soit $\varepsilon > 0$ tel que $[p-\varepsilon, p+\varepsilon] \subset]0,1[$. En utilisant la continuité de f en p et que f est bornée sur $[p-\varepsilon, p+\varepsilon]$, montrer que

$$\mathbb{E}\left(\left|f\left(\overline{\mathrm{X}}_n\right) - f(p)\right| \mathbb{1}_{\left|\overline{\mathrm{X}}_n - p\right| \leqslant \varepsilon}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n$.

Solution

1) Soit $\varepsilon > 0$, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{\mathrm{X}}_n - p\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathrm{V}\left(\overline{\mathrm{X}}_n\right)}{\varepsilon^2}$$

où $\mathrm{V}\left(\overline{\mathrm{X}}_n\right)$ désigne la variance de la variable aléatoire $\overline{\mathrm{X}}_n$. On a par indépendance des (X_k), $\mathrm{V}\left(\overline{\mathrm{X}}_n\right) = \dfrac{1}{n^2}\left(\mathrm{V}(\mathrm{X}_1) + \cdots + \mathrm{V}(\mathrm{X}_n)\right)$ et par identité des lois, $\mathrm{V}\left(\overline{\mathrm{X}}_n\right) = \dfrac{\mathrm{V}(\mathrm{X}_1)}{n} = \dfrac{p(1-p)}{n}$ donc $\mathbb{P}\left(\left|\overline{\mathrm{X}}_n - p\right| > \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$.

D'où en choisissant ε tel que $\alpha = \dfrac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$, il vient

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{\mathrm{X}}_n - p\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \alpha$$

On obtient $\varepsilon = \boxed{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n\alpha}} = u_n.}$

2) On étudie classiquement la fonction.
$\varphi'(x) = \dfrac{1 - p(1+x)}{(px + 1 - p)^3}$ d'où, par étude du signe, $\sup\limits_{\mathbf{R}^+} \varphi = \max\limits_{\mathbf{R}^+} \varphi = \varphi\left(\dfrac{1-p}{p}\right) = \dfrac{1}{4p(1-p)}$.

3) On calcule $\mathbb{E}\left(\exp(t(\mathrm{X}_1 - p))\right) = pe^{t(1-p)} + (1-p)e^{-tp} = e^{-tp}\left(pe^t + (1-p)\right)$
Posons $\Psi(t) = \ln\left(\mathbb{E}\left(\exp(t(\mathrm{X}_1 - p))\right)\right) = -tp + \ln\left(pe^t + (1-p)\right)$. On a

$$\Psi'(t) = p\,(1-p)\,\frac{e^t - 1}{pe^t + 1 - p} \geqslant 0 \text{ et}$$
$$\Psi''(t) = p\,(1-p)\,\frac{e^t}{(pe^t + 1 - p)^2} = p\,(1-p)\,\varphi\left(e^t\right).$$

Ainsi pour tout $t \geqslant 0$, $\Psi''(t) \leqslant p\,(1-p) \sup\limits_{\mathbf{R}^+} \varphi = \dfrac{1}{4}$

Donc, puisque $\Psi(0) = \Psi'(0) = 0$, en intégrant, $\Psi(t) \leqslant \dfrac{t^2}{8}$.

Conclusion pour $t \geqslant 0$, $\mathbb{E}\left(\exp(t(\mathrm{X}_1 - p))\right) \leqslant \exp\left(\dfrac{t^2}{8}\right)$.

4) Écrivons successivement pour tout $t \geqslant 0$ et tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\overline{\mathrm{X}}_n - p \geqslant \varepsilon\right) &\leqslant \mathbb{P}\left(\exp\left[t\left(\overline{\mathrm{X}}_n - p\right) - \varepsilon t\right] \geqslant 1\right) \leqslant \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\exp\left[t\left(\overline{\mathrm{X}}_n - p\right) - \varepsilon t\right] \geqslant 1}\right)\\
&\leqslant \mathbb{E}\left(\exp\left[t\left(\overline{\mathrm{X}}_n - p\right) - \varepsilon t\right]\right)\\
&\leqslant \exp(-\varepsilon t)\mathbb{E}\left(\exp\left[\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{X}_k - p)\right]\right)\\
&\leqslant \exp(-\varepsilon t)\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n}\exp\left[\frac{t}{n}(\mathrm{X}_k - p)\right]\right)\\
&\underset{\text{indép.}}{\leqslant} \exp(-\varepsilon t)\prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\exp\left[\frac{t}{n}(\mathrm{X}_k - p)\right]\right)\\
&\leqslant \exp(-\varepsilon t)\left(\mathbb{E}\left(\exp\left[\frac{t}{n}(\mathrm{X}_1 - p)\right]\right)\right)^n\\
&\underset{\text{question préc.}}{\leqslant} \exp(-\varepsilon t)\left(\exp\left(\frac{t^2}{8n^2}\right)\right)^n\\
&\leqslant \exp\left(-\varepsilon t + \frac{t^2}{8n}\right).
\end{aligned}$$

On a donc en considérant le minimum pour $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\overline{\mathrm{X}}_n - p \geqslant \varepsilon\right) &\leqslant \inf_{t \geqslant 0}\exp\left(-\varepsilon t + \frac{t^2}{8n}\right) = \exp\left(-\varepsilon t + \frac{t^2}{8n}\right)_{|t = 4n\varepsilon}\\
&\leqslant \exp\left(-2n\varepsilon^2\right).
\end{aligned}$$

On procède de même pour montrer que $\mathbb{P}\left(\overline{\mathrm{X}}_n - p \leqslant -\varepsilon\right) \leqslant \exp\left(-2n\varepsilon^2\right)$.
Plus précisément, en posant pour tout $t \geqslant 0$, $\widetilde{\Psi}(t) = \Psi(-t)$, on a toujours $\widetilde{\Psi}(0) = \widetilde{\Psi}'(0) = 0$ et $\widetilde{\Psi}''(t) \leqslant \dfrac{1}{4}$ donc $\widetilde{\Psi}(t) = \Psi(-t) \leqslant \exp\left(\dfrac{t^2}{8}\right)$ puis $\mathbb{E}\left(\exp(t(p - \mathrm{X}_1))\right) \leqslant \exp\left(\dfrac{t^2}{8}\right)$ et on conclut aisément.
Ainsi, $\mathbb{P}\left(\left|\overline{\mathrm{X}}_n - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\overline{\mathrm{X}}_n - p \geqslant \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(p - \overline{\mathrm{X}}_n \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\exp\left(-2n\varepsilon^2\right)$.

5) On cherche un ε tel que $2\exp\left(-2n\varepsilon^2\right) = \alpha$ c'est-à-dire $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{\alpha}\right)}{2n}}$.
Pour $\alpha = 0,05$ et $p = \dfrac{1}{2}$, on obtient $u_n \simeq 2,24 \times \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $\varepsilon_n = 1,36 \times \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
et pour $\alpha = 0,01$, $u_n = 5 \times \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $\varepsilon_n = 1,63 \times \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ce qui notablement meilleur.
On choisira donc plutôt l'intervalle de confiance $[p - \varepsilon_n, p + \varepsilon_n]$.
Remarque. Le théorème limite central (= de Moivre-Laplace pour la loi binomiale) entrevu en classes de terminale (mais hors-programme en classes préparatoires) propose un intervalle encore meilleur, par exemple pour $\alpha = 0,05$,
$\left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \simeq \left[p - 0,98 \times \dfrac{1}{\sqrt{n}}, p + 0,98 \times \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ pour $p = \dfrac{1}{2}$
dès lors que n est assez grand...
6) a) Puisque pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}\left(\overline{\mathrm{X}}_n = k\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $\dfrac{1}{k\sqrt{n-k}} = \dfrac{1}{n\sqrt{n}} \dfrac{1}{\frac{1}{n}\sqrt{1 - \frac{k}{n}}}$,
en tenant compte des bornes,

$$\mathrm{A}_n = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{1}{\frac{k}{n}\sqrt{1 - \frac{k}{n}}} = \mathbb{E}\left(f(\overline{\mathrm{X}}_n)\right).$$

b) La fonction f est continue sur $[p - \varepsilon, p + \varepsilon]$ donc bornée, notons M_ε cette borne.
Écrivons que la fonction f en continue en p. Pour tout $\widetilde{\varepsilon} > 0$, il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall t \in]0, 1[, \quad |t - p| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(t) - f(p)| \leqslant \widetilde{\varepsilon}.$$

Ainsi, $\left\{\left|\overline{\mathrm{X}}_n - p\right| \leqslant \alpha\right\} \subset \left\{\left|f\left(\overline{\mathrm{X}}_n\right) - f(p)\right| \leqslant \widetilde{\varepsilon}\right\}$. Quitte à réduire α, on choisit α tel que $\alpha < \varepsilon$, ainsi,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left|f\left(\overline{\mathrm{X}}_n\right) - f(p)\right| \mathbb{1}_{\left|\overline{\mathrm{X}}_n - p\right| \leqslant \varepsilon}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left|f\left(\overline{\mathrm{X}}_n\right) - f(p)\right| \mathbb{1}_{\left|\overline{\mathrm{X}}_n - p\right| \leqslant \alpha}\right) + \mathbb{E}\left(\left|f\left(\overline{\mathrm{X}}_n\right) - f(p)\right| \mathbb{1}_{\alpha < \left|\overline{\mathrm{X}}_n - p\right| \leqslant \varepsilon}\right) \\
&\leqslant \widetilde{\varepsilon}\mathbb{P}\left(\left|\overline{\mathrm{X}}_n - p\right| \leqslant \alpha\right) + \mathrm{M}_\varepsilon \mathbb{P}\left(\left|\overline{\mathrm{X}}_n - p\right| > \alpha\right) \\
&\leqslant \widetilde{\varepsilon} + 2\mathrm{M}_\varepsilon \exp\left(-n\alpha^2\right) \text{ d'après la question } \mathbf{4)}.
\end{aligned}$$

Pour tout $\widetilde{\varepsilon} > 0$, il existe $n_0 \geqslant 1$, tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\mathbb{E}\left(\left|f\left(\overline{\mathrm{X}}_n\right) - f(p)\right| \mathbb{1}_{\left|\overline{\mathrm{X}}_n - p\right| \leqslant \varepsilon}\right) \leqslant 2\widetilde{\varepsilon}$$

ce qui prouve bien le résultat.
Remarque. Le lecteur connaissant la preuve de l'approximation des fonctions continues sur un segment par les polynômes de Bernstein reconnaîtra la même technique de démonstration.

c) Nous avons en ayant fixé un ε comme précédemment,

$$\mathbb{E}\left(\left|f\left(\overline{\mathrm{X}}_n\right)-f(p)\right|\mathbb{1}_{\left|\overline{\mathrm{X}}_n-p\right|\leqslant\varepsilon}\right)+\mathbb{E}\left(\left|f\left(\overline{\mathrm{X}}_n\right)-f(p)\right|\mathbb{1}_{\left|\overline{\mathrm{X}}_n-p\right|>\varepsilon}\right).$$

Or

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left|f\left(\overline{\mathrm{X}}_n\right)-f(p)\right|\mathbb{1}_{\left|\overline{\mathrm{X}}_n-p\right|>\varepsilon}\right)&\leqslant\max_{k\in[\![1,n-1]\!]}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(p)\right|\times\mathbb{P}\left(\left|\overline{\mathrm{X}}_n-p\right|\geqslant\varepsilon\right)\\&\leqslant\max_{k\in[\![1,n-1]\!]}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(p)\right|\times 2\exp\left(-2n\varepsilon^2\right).\end{aligned}$$

Puisque pour $x\in]0,1[$, $\operatorname{sgn}\left(f'(x)\right)=\operatorname{sgn}\left(3x-2\right)$, la fonction f est décroissante puis croissante sur $]0,1[$, d'où

$$\begin{aligned}\max_{k\in[\![1,n-1]\!]}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(p)\right|&=\max\left(\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-f(p)\right|,\left|f\left(1-\frac{1}{n}\right)-f(p)\right|\right)\\&=\underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\max\limits_{k\in[\![1,n-1]\!]}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(p)\right|\times 2\exp\left(-2n\varepsilon^2\right)=0$.

En regroupant les deux espérances, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left(\left|f\left(\overline{\mathrm{X}}_n\right)-f(p)\right|\right)=0$ d'où

$$\left|\mathrm{A}_n-f(p)\right|=\left|\mathbb{E}\left(f\left(\overline{\mathrm{X}}_n\right)-f(p)\right)\right|\leqslant\mathbb{E}\left(\left|f\left(\overline{\mathrm{X}}_n\right)-f(p)\right|\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Conclusion $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{A}_n=f(p)$.

□

Exercice 1.10 – Marche aléatoire dans $\mathbf{Z}^3$ – ☕

On s'intéresse désormais à la marche aléatoire de la puce dans $\mathbf{Z}^3$.
Soient $\mathrm{D}_n=(\mathrm{X}_n,\mathrm{Y}_n,\mathrm{Z}_n)$ des vecteurs aléatoires indépendants de même loi avec

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{D}_n=(1,0,0)\right)=\cdots=\mathbb{P}\left(\mathrm{D}_n=(0,0,-1)\right)=\frac{1}{6}.$$

Notons $\mathrm{S}_0^{(3)}=\overrightarrow{0}$ et $\mathrm{S}_n^{(3)}=\mathrm{S}_0^{(3)}+\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{D}_k\in\mathbf{Z}^2$ la position de la puce à la n^e étape (avec $\overrightarrow{0}=(0,0,0)$).

1) Montrer successivement que

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{2n}^{(3)}=\overrightarrow{0}\right)=\frac{1}{6^{2n}}\sum_{a+b+c=n}\binom{2n}{a}\binom{2n-a}{a}\binom{2n-2a}{b}\binom{2n-2a-b}{b}\binom{2n-2a-2b}{c}\binom{2n-2a-2b-c}{c}$$

$$= \frac{1}{6^{2n}} \sum_{a+b+c=n} \frac{(2n)!}{a!a!b!b!c!c!} = \frac{1}{6^{2n}} \sum_{a+b\leqslant n} \frac{(2n)!}{a!a!b!b!\,(n-\ell)!\,(n-\ell)!}$$
$$= \frac{1}{6^{2n}} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(2n)!}{(2\ell)!\,(2(n-\ell))!} \frac{(2(n-\ell))!}{(n-\ell)!\,(n-\ell)!} \sum_{a+b=\ell} \frac{(2\ell)!}{a!a!b!b!}$$
$$= \frac{1}{6^{2n}} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{2n}{2\ell} \binom{2(n-\ell)}{n-\ell} \sum_{a+b=\ell} \frac{(2\ell)!}{a!a!b!b!}.$$

2) En notant $\mathbb{P}_n^{(k)} = \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{2n}^{(k)} = \overrightarrow{0}\right)$ la probabilité de retour à l'origine de la puce en $2n$ étapes dans $\mathbf{Z}^k$ pour $k \in \{1,2,3\}$, établir

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{2n}^{(3)} = \overrightarrow{0}\right) = \frac{1}{3^{2n}} \sum_{\ell=0}^{n} 2^{2\ell} \binom{2n}{2\ell} \mathbb{P}_{n-\ell}^{(1)} \mathbb{P}_{\ell}^{(2)}.$$

Indication les exercices précédents ont permis de prouver que $\mathbb{P}_n^{(1)} = 2^{-2n}\binom{2n}{n}$ et $\mathbb{P}_\ell^{(2)} = \left(\mathbb{P}_n^{(1)}\right)^2 = \left(2^{-2n}\binom{2n}{n}\right)^2$ et on pourra utiliser, en la justifiant, la formule combinatoire $\displaystyle\sum_{a=0}^{\ell} \binom{\ell}{a}^2 = \binom{2\ell}{\ell}$.

3) Dans les exercices précédents, on a établi que

$$\mathbb{P}_n^{(1)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ et } \mathbb{P}_n^{(2)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

montrer que $\mathbb{P}_n^{(3)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ en utilisant le résultat de la question **6)** de l'exercice 1.9 p. 15.

Indication On pourra écrire $\displaystyle\frac{1}{6^{2n}} = \frac{1}{2^{2n-2\ell}} \left(\frac{2}{3}\right)^{2\ell} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-2\ell}$.

4) En utilisant l'exercice 1.28 p. 72 (lemme de Borel-Cantelli), en déduire que la puce ne revient presque sûrement qu'un nombre fini de fois à l'origine (théorème de Polya, 1921).
(on peut montrer qu'il existe une probabilité d'environ $0,65$ pour que la puce revienne à l'origine).

Solution

1) Sur les $2n$ étapes, on choisit les $2a$ déplacements $(+1,0,0)$ et $(-1,0,0)$, les $2b$ déplacements $(0,+1,0)$ et $(0,-1,0)$, les $2c$ déplacements $(+1,0,0)$ et $(-1,0,0)$ avec $2(a+b+c) = 2n$ pour revenir à l'origine. On obtient alors la formule de l'énoncé.

Remarque il est courant de définir la combinaison multiple $\binom{2n}{a,a,b,b,c,c} = \dfrac{(2n)!}{a!a!b!b!c!c!}$ mais son utilisation n'est pas officiellement au programme.

2) • La formule combinatoire $\displaystyle\sum_{a=0}^{\ell} \binom{\ell}{a}^2 = \sum_{a=0}^{\ell} \binom{\ell}{a}\binom{\ell}{\ell-a} = \binom{2\ell}{\ell}$ peut se prouver en considérant les différentes manières de choisir ℓ boules dans une urne de 2ℓ boules avec ℓ boules rouges et ℓ boules noires : on partitionne suivant le nombre a de boules rouges choisies pour constituer notre lot de ℓ boules.

• Synthétisons les résultats des exercices précédents.

$\mathbb{P}_n^{(1)} = 2^{-2n}\binom{2n}{n}$ et $\mathbb{P}_\ell^{(2)} = \left(\mathbb{P}_n^{(1)}\right)^2 = \left(2^{-2n}\binom{2n}{n}\right)^2$.

On a donc $\mathbb{P}_{n-\ell}^{(1)} = 2^{-2(n-\ell)}\binom{2(n-\ell)}{n-\ell}$ et $\mathbb{P}_\ell^{(2)} = \left(2^{-2\ell}\binom{2\ell}{\ell}\right)^2$.

$\displaystyle\sum_{a+b=\ell} \frac{(2\ell)!}{a!a!b!b!}$ peut s'écrire

$$\sum_{a+b=\ell} \frac{(2\ell)!}{a!a!b!b!} = \frac{(2\ell)!}{(\ell!)^2}\sum_{a=0}^{\ell}\binom{\ell}{a}^2 = \binom{2\ell}{\ell}\binom{2\ell}{\ell} = \binom{2\ell}{\ell}^2 = 2^{4\ell}\mathbb{P}_\ell^{(2)}$$

Donc $\displaystyle\mathbb{P}_{n-\ell}^{(1)}\mathbb{P}_\ell^{(2)} = \frac{1}{2^{2n-2\ell}}\binom{2(n-\ell)}{n-\ell}\frac{1}{2^{4\ell}}\sum_{a+b=\ell}\frac{(2\ell)!}{a!a!b!b!} = \frac{1}{2^{2n+2\ell}}\binom{2(n-\ell)}{n-\ell}\sum_{a+b=\ell}\frac{(2\ell)!}{a!a!b!b!}$

d'où $\displaystyle\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{2n}^{(3)} = \overrightarrow{0}\right) = \frac{1}{3^{2n}}\sum_{\ell=0}^{n} 2^{2\ell}\binom{2n}{2\ell}\mathbb{P}_{n-\ell}^{(1)}\mathbb{P}_\ell^{(2)}$.

3) Il existe K_1 et K_2 tel que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}_n^{(1)} \leqslant \dfrac{\mathrm{K}_1}{\sqrt{n}}$ et $\mathbb{P}_n^{(2)} \leqslant \dfrac{\mathrm{K}_2}{n}$.

Il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{2n}^{(3)} = \overrightarrow{0}\right) &= \frac{1}{3^{2n}}\sum_{\ell=0}^{n} 2^{2\ell}\binom{2n}{2\ell}\mathbb{P}_{n-\ell}^{(1)}\mathbb{P}_\ell^{(2)} \\ &\leqslant \frac{\mathbb{P}_n^{(1)} + \mathbb{P}_n^{(2)}}{6^{2n}} + \mathrm{K}_1\mathrm{K}_2\sum_{\ell=0}^{n}\frac{2^{2\ell}}{3^{2n}}\binom{2n}{2\ell}\frac{1}{\left(\sqrt{n-\ell}\right)\ell} \\ &\leqslant \frac{2}{6^{2n}} + \frac{\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2}{n\sqrt{n}}\sum_{\ell=1}^{n-1}\binom{2n}{2\ell}\left(\frac{2}{3}\right)^{2\ell}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-2\ell}\frac{1}{\left(\sqrt{1-\frac{\ell}{n}}\right)\frac{\ell}{n}}.\end{aligned}$$

D'après la question **6)** de l'exercice 1.9 p. 15,

$$\sum_{k=1}^{2n-1}\binom{2n}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-k}\frac{1}{\left(\sqrt{1-\frac{\ell}{n}}\right)\frac{\ell}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\left(\sqrt{1-\dfrac{2}{3}}\right)\dfrac{2}{3}} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Il est clair que la somme dans l'inégalité est inférieure pour tout $n \geqslant 2$ à la dernière expression donc est bornée. Par ailleurs, $\dfrac{2}{6^{2n}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ d'où $\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{2n}^{(3)} = \overrightarrow{0}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

Remarque Il existe une autre preuve combinatoire de ce résultat en montrant que $\dfrac{n!}{a!b!c!}$ pour $a+b+c=n$ est maximal pour $a \simeq b \simeq c \simeq \dfrac{n}{3}$, voir par exemple l'ouvrage *Exercices de probabilités* de M. Cottrell, V. Genon-Catalot, C. Duhamel et T. Meyre, éd. Cassini.

4) Notons $\mathcal{A}_n$ l'événement « la puce est à l'origine à l'instant $2n$ ». La série de terme général $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathcal{A}_n)$ converge, donc d'après le lemme de Borel-Cantelli (voir exercice 1.28 p. 72), $\displaystyle\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geqslant 0}\left(\bigcup_{k\geqslant n}\mathcal{A}_k\right)\right) = 0$ ce qui veut exactement dire que « presque jamais », la puce ne revient une infinité de fois à l'origine.

□

Exercice 1.11 – Inégalité de Hoeffding – Python

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
1) Dans cette question, $(X_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ désigne une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p.
a) Écrire une fonction en `Python` `S(n, p)` retournant un tableau de longueur n dont le coefficient d'indice k est une réalisation de $S_k = \dfrac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} X_j$.
Indication Dans le sous-module `random` de `numpy`, l'instruction `binomial(n, p, size=N)` construit un tableau (`array`) de `numpy` de longueur N contenant N réalisations d'une loi binomiale de paramètres $(n,\ p)$.
b) En déduire une fonction en `Python` (avec arguments n, p) permettant le tracé des lignes polygonales passant par les points $(k,\ S_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$, par les points $\left(k,\ p+\sqrt{\frac{\ln k}{k}}\right)$ et par les points $\left(k,\ p-\sqrt{\frac{\ln k}{k}}\right)$.
Que constate-t-on sur plusieurs exemples ?
2) Soit $X : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire réelle discrète **centrée** telle que $|X| \leqslant 1$.
a) Démontrer que pour tout réel t et pour tout réel $x \in [-1, 1]$,

$$\exp(tx) \leqslant \frac{1}{2}(1-x)\exp(-t) + \frac{1}{2}(1+x)\exp(t)$$

b) Expliquer pourquoi la variable aléatoire $\exp(tX)$ est d'espérance finie, puis démontrer que $\mathbb{E}(\exp(tX)) \leqslant \operatorname{ch} t$.
c) En déduire que $\mathbb{E}(\exp(tX)) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.
3) On considère à présent une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires réelles discrètes **centrées, mutuellement indépendantes et toutes bornées.**
On notera $c_n = \|X_n\|_{\infty,\Omega}$ et on pose, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

a) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{E}(\exp(tS_n)) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)$$

b) En utilisant l'inégalité de Markov, démontrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right).$$

c) En choisissant convenablement le réel $t > 0$, démontrer que

$$\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(-\varepsilon^2 \Big/ \left(2\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)\right)$$

d) Conclure alors que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^{n} c_j^2}\right) \quad \textbf{(inégalité de Hoeffding)}$$

e) On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $n \geqslant 1$, $|X_n| \leqslant c$ (avec $c > 0$). Vérifier alors que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leqslant 2\exp\left(-n\frac{\varepsilon^2}{2c^2}\right)$$

Dans la suite on admet que les précédents résultats se généralisent de la façon suivante : soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes, toutes de même loi, d'espérance finie pour lesquelles il existe deux réels distincts* a, b *tels que pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$, $a \leqslant X_n \leqslant b$, *alors*

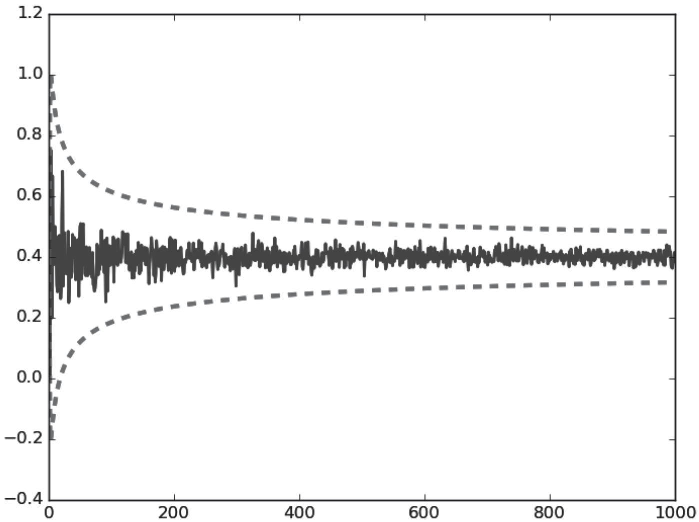
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, n \in \mathbf{N}^*,\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{n}\right| > \varepsilon\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{(b-a)^2}\right)$$

4) Démontrer que pour $\alpha > \frac{1}{2}$ et pour tout entier $N \geqslant 2$,

$$\mathbb{P}\left(\left\{\forall\, k > N,\ \left|\frac{S_k}{k} - \mathbf{E}(X_1)\right| \leqslant \sqrt{\frac{\alpha \ln k}{k}}\right\}\right) \geqslant 1 - \frac{2}{2\alpha - 1}N^{1-2\alpha}$$

Solution

1) On obtient la figure suivante pour $n = 1000$ et $p = 0.4$



avec le code suivant

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy.random import binomial


def S(n, p):
```

```
        e = binomial(1, p, size=n)
        return e.sum()/n


    def dessin(n, p):
        x = np.array([k for k in range(1, n+1)])
        s = np.array([S(k, p) for k in range(1, n+1)])
        y = np.array([p + np.sqrt(np.log(k)/k) for k in range(1, n+1)])
        z = np.array([p - np.sqrt(np.log(k)/k) for k in range(1, n+1)])
        plt.plot(x, s, 'b', lw=3)
        plt.plot(x, y, 'r--', lw=3)
        plt.plot(x, z, 'r--', lw=3)
        plt.show()

    dessin(1000, .2)
```

2) Soit $X : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire discrète centrée telle que $|X| \leqslant 1$.
a) Pour tout réel t et pour tout réel $x \in [-1,1]$, $\lambda = \frac{1+x}{2} \in [0,1]$ et $1-\lambda = \frac{1-x}{2}$. La fonction exp étant convexe sur $\mathbf{R}$, on en déduit immédiatement l'inégalité suivante :

$$\exp(tx) = \exp\left((1-\lambda)(-t) + \lambda t\right) \leqslant \frac{1}{2}(1-x)\exp(-t) + \frac{1}{2}(1+x)\exp(t)$$

b) Soit $Y : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire réelle discrète bornée en valeur absolue par un réel M. On supposera $Y(\Omega)$ dénombrable (sinon il n'y a rien à faire).
On écrit $Y(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ où les x_n sont deux à deux distincts. On a alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|x_n P(Y = x_n)| \leqslant M \cdot P(Y = x_n)$$

et on sait que la série de terme général $P(Y = x_n)$ est convergente (de somme égale à 1).
Conclusion la série de terme général $x_n P(Y = x_n)$ est absolument convergente, donc Y est d'espérance finie. La variable aléatoire $Y = \exp(tX)$ est donc d'espérance finie car X étant bornée, il en est de même de $\exp(tX)$,

$$0 < \exp(tX) \leqslant \exp(|tX|) \leqslant \exp(|t|\,M)$$

De plus, en reprenant l'inégalité de convexité démontrée plus haut ainsi que la croissance de l'espérance,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\exp(tX)\right) &\leqslant \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}(1-X)\exp(-t) + \frac{1}{2}(1+X)\exp(t)\right)\\ &\leqslant \frac{1}{2}\exp(-t)\cdot\mathbb{E}(1-X) + \frac{1}{2}\exp(t)\cdot\mathbb{E}(1+X)\end{aligned}$$

Or on se rappelle que $\mathbb{E}(X) = 0$, par conséquent,

$$\forall\, t \in \mathbf{R},\ \mathbb{E}\left(\exp(tX)\right) \leqslant \operatorname{ch} t$$

c) Il suffit de prouver que pour tout réel t, $\operatorname{ch} t \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$. Or,

$$\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) - \operatorname{ch} t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n n!} - \frac{1}{(2n)!}\right)t^{2n}$$

et on vérifie que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(2n)! \geqslant 2^n n!$ (les vérifications sont faciles).
3) a) Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\exp(tS_n) = \prod_{k=1}^{n}\exp(tX_k)$$