2 Matrices

RAPPEL DE COURS

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathbb{R}^{n\times n}$ (ou $\mathbb{C}^{n\times n}$). A est **inversible** s'il existe $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (ou $\mathbb{C}^{n\times n}$) telle que $AB = BA = I$, notation $B = A^{-1}$.

Le **rang** de A est le nombre de vecteurs colonnes (ou lignes) indépendants ; notation rg(A). *Le rang est la dimension de la plus grande matrice carrée de déterminant non nul extraite de A.*

Le **noyau** de A est l'ensemble des vecteurs X tels que $AX = 0$; notation Ker(A).

Un réel ou un complexe λ est une **valeur propre** de A et $V \in \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), V non nul, un **vecteur propre associé** si $AV = \lambda V$. *Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme* $\det(A - XI) = 0$. L'ensemble des valeurs propres de A est le **spectre** de la matrice ; notation $\sigma(A)$.

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est inversible à l'une des conditions nécessaires et suffisantes suivantes : 0 n'est pas valeur propre ou $\det(A) \neq 0$ *ou Ker$(A) = \{0\}$ ou rang$(A) = n$.*

A est **diagonalisable** dans $\mathbb{C}$ s'il existe une matrice inversible $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et une matrice diagonale D dans $\mathbb{C}^{n\times n}$ telles que $P^{-1}AP = D$. Dans ce cas les valeurs propres de A sont sur la diagonale de D, les vecteurs propres sont les colonnes de P. A peut être diagonalisable dans $\mathbb{R}$ si D et P sont dans $\mathbb{R}^{n\times n}$. *A est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de vecteurs propres.*

Décomposition de Jordan : Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, il existe une matrice $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ inversible telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & J_{k_\ell}(\lambda_\ell) \end{pmatrix}, \text{ où } J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ et les } \lambda_i$$

sont les valeurs propres de A.

A est **symétrique** si $A^T = A$ ou encore $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout i et j de $1, \ldots, n$.

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est symétrique, alors ses valeurs propres sont réelles, A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et on peut choisir une base orthonormée de vecteurs propres ; dans ce cas P est unitaire i.e. $P^{-1} = P^T$ et $P^TAP = D$.

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est **définie positive** si pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X^TAX \geqslant 0$ et $X^TAX = 0 \Rightarrow X = 0$. Si A est définie positive alors A est inversible.

Méthode de Gauss : Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (ou $\mathbb{C}^{n\times n}$) est inversible, il existe une matrice de permutation (inversible) P et 2 matrices L et U, L étant triangulaire inférieure à diagonale unité, U étant triangulaire supérieure, telles que $PA = LU$. Le système $AX = b$ se transforme en $LUX = Pb$ et on résout successivement $LY = Pb$ puis $UX = Y$.

Factorisation de Cholesky : Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est symétrique et définie positive, il existe une unique matrice C triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $A = C^TC$.

S'il est impossible de donner un rappel complet du cours sur les matrices en quelques lignes, on retrouvera aussi des propriétés dans les chapitres suivants : changement de base, localisation des valeurs propres dans les disques de Gershgorin, matrices tridiagonales, matrices à diagonale dominante, méthodes itératives de résolution des systèmes (problème 11.1) etc.

ÉNONCÉS DES EXERCICES

Le premier paragraphe ci-dessous est une liste de petits exercices qui, sans faire le tour de la question, permet de se (re)familiariser avec le calcul matriciel. Dans le deuxième, on utilise `Matlab` pour diagonaliser une matrice et calculer ses puissances. Enfin le dernier illustre la méthode de la puissance qui permet généralement d'approcher la plus grande valeur propre en module. Il s'agit à nouveau de découvrir un certain nombre d'outils de `Matlab`.

2.1 Premiers calculs

1. Inversion

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Montrer que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & \dots & (-2)^{j-1} & \dots & (-2)^{n-1} \\ 0 & 1 & -2 & 4 & \dots & \dots & (-2)^{n-2} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & (-2)^{j-i} & \dots & (-2)^{n-i} \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & 1 & -2 \\ 0 & & \dots & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Matrice triangulaire inversible

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est inversible et triangulaire supérieure, montrer que A^{-1} est triangulaire supérieure. Préciser la diagonale.

3. Inverse d'une matrice et valeurs propres

Montrer que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est inversible, les valeurs propres de A^{-1} sont les inverses des valeurs propres de A.

4. Décomposition de Cholesky

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est définie positive. Déterminer la décomposition de Cholesky. Vérifier avec `Matlab`. Tester aussi la décomposition de Schur avec `Matlab`.

5. Matrice définie positive et valeurs propres

Montrer que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est symétrique et définie positive, ses valeurs propres sont strictement positives.

6. Perturbation du second membre d'un système

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$ et $\Delta A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$ où $\varepsilon = 10^{-10}$; ΔA est une perturbation de A. Si $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on définit X et $X + \Delta X$ par $AX = b$ et $(A + \Delta A)(X + \Delta X) = b$. Calculer X et montrer que $\Delta X \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Des détails sur ces perturbations sont donnés au chapitre suivant.

2.2 Valeurs propres et puissances, un exemple

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$. À l'aide de `Matlab`,

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Les noms anglais sont eigenvalues et eigenvectors... et on peut consulter l'aide en ligne.

2. Construire une matrice de passage qui rend A diagonale.

3. Calculer l'inverse de la matrice de passage.

4. Vérifier la diagonalisation en effectuant des produits matriciels.

5. En déduire $\lim_{n\to\infty} A^n$.

6. Le vérifier en calculant A^{100} directement.