Guillaume Connan

VISA POUR LA PRÉPA 2023-2024

MATHS ET INFORMATIQUE

MPSI - MP2I - PCSI - PTSI
BCPST - ECG - TSI - TPC

l'intégrale

DUNOD

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-085202-4

Table des matières

Avant-propos

Vous vous apprêtez à entrer en Prépa : bravo ! C'est le bon choix :)

Vous attendent des semaines remplies d'explorations scientifiques mais surtout de rude labeur. Préparez-vous à subir un choc, notamment en mathématiques depuis que la réforme du secondaire a sans cesse allégé les horaires de cette discipline et le niveau d'exigence jusqu'à enlever une heure de cours par semaine en spécialité de la classe de Première, à inciter les futurs BCPST à choisir l'option mathématiques complémentaires et à laisser l'étude des notions importantes de Terminale après l'épreuve du Bac du mois de mars.

On observe donc une certaine érosion des capacités de calcul et on voit arriver en Prépa des élèves qui n'ont pas toujours travaillé l'informatique et qui ne savent pas trop ce que signifie travailler un cours.

Heureusement, c'est pour remédier à ces lacunes que le *Visa* a été conçu ! Dès le second semestre de Terminale ou au moins durant l'été et même pendant vos premiers mois en Prépa, vous pourrez (et devrez…) travailler sur le *Visa*. Il faudra d'abord absolument travailler le cours jusqu'à sa parfaite assimilation. Ce n'est qu'ensuite que le travail sur les exercices pourra être fructueux. Une succession d'allers-retours entre cours et exercices vous permettra ensuite de peaufiner votre compréhension des notions. Ne regardez les corrigés qu'en dernier recours : l'essentiel en mathématiques est de chercher et non pas de reproduire les idées des autres. Le chemin de votre progression sera semé d'erreurs, d'impasses mais surtout de la joie de découvrir, de comprendre et de de créer votre propre solution.

Il ne me reste alors plus qu'à vous souhaiter la bienvenue dans le monde merveilleux des explorations mathématiques et surtout bon courage pour ce travail sur le cours.

Joyeux été mathématique !

Guillaume Connan

LES + EN LIGNE

Salon d'aide et d'échange :

Durant votre travail sur le *Visa*, vous pourrez faire vos remarques, poser vos questions, répondre à celles des autres et proposer vos propres solutions sur le groupe de discussion `Element` :

`https://element.io/get-started`

Installez l'application sur Windows, Mac, GNU-Linux, tablette ou smartphone. Créez un compte et envoyez un message via `Element` à `@giyom:matrix.org` pour finaliser votre inscription.

Savez-vous raisonner ?

CHAPITRE 1

1.1 Un brin de logique

« Contrariwise, continued Tweedledee, if it was so, it might be; and if it were so, it would be; but as it isn't, it ain't. That's logic. »

Lewis CARROLL – *De l'autre côté du miroir*

Rapports de jury de concours

Voici quelques extraits de rapports de jurys qui mettent en évidence certaines lacunes que nous allons tenter de combler dans ce chapitre :

- « D'une façon générale, les candidats ont tendance à utiliser un langage de plus en plus imprécis : on entend "on fait f", "on remplace", "on passe de l'autre côté"… »
- « On peut aussi signaler que certains candidats ne se facilitent pas les choses en appelant x un nombre entier et k un réel ! Et ceci est de plus en plus fréquent ! »
- « Les symboles "implique" et "équivalent" sont employés comme des signes de ponctuation. »
- « Certains candidats semblent parfois confondre "appliquer une méthode" et "construire un raisonnement" ; on peut par exemple rappeler que tout n'est pas un raisonnement par récurrence. »
- « Il faut être capable d'identifier une condition nécessaire ou une condition suffisante et surtout éviter de confondre ces deux notions. »
- « Les résultats du cours sont les points d'appui sur lesquels on demande aux candidats de construire leur raisonnement. Il est donc indispensable de connaître son cours et il faut s'attendre à ce que l'examinateur demande de citer explicitement un théorème ou une définition. On commence à constater une certaine tendance à privilégier la résolution des exercices plutôt que la compréhension. Certains élèves savent que "on fait comme ça", ou citent "je connais un exercice qui ressemble". Les candidats doivent faire attention à ne pas confondre méthode et astuce. »
- « Comme l'an dernier, le niveau est très hétérogène et l'impression générale ressentie à la lecture des copies amène à penser que les questions les plus subtiles, qui demandent une compréhension fine de la théorie, quel que soit le domaine concerné, échappent à presque tous les candidats. La plupart d'entre eux ont acquis des techniques et des réflexes mais ne comprennent pas forcément en profondeur ce qu'ils font. »

Contexte

On appellera **proposition** tout énoncé dont on peut décider s'il est vrai ou faux indépendamment de ses composantes.

On distinguera la logique des propositions de la logique des **prédicats**, qui introduit des variables dans les assertions pouvant les rendre donc parfois vraies et parfois fausses.

Par exemple « *Je suis actuellement en salle 3* » est une proposition susceptible d'être vraie ou fausse dans toute situation alors que la valeur de vérité de « *x est actuellement en salle 3* » dépend de x.

En informatique, **Vrai** et **Faux** sont appelés des **booléens**, notés `True` et `False` en **`Python`** :

```
>>> 2 > 3
False
>>> 2 < 3
True
>>> 2 + 2 == 4
True
>>> len("Papa") == 2 + 2
True
```

Implication

Définition : implication

A et B étant deux propositions, on note $A \Rightarrow B$ (A implique B) la proposition qui est toujours vraie sauf quand A est vraie et B est fausse.

On comprend alors mieux cette citation de Pierre Dac (dans *Y'a du mou dans la corde à nœuds*) : « *Avec le mot SI on peut faire tout ce qu'on ne peut pas faire.* »

On peut résumer la situation dans une **table de vérité** car les propositions A et B ne peuvent prendre que deux valeurs donc il n'y a que quatre possibilités pour les valeurs du couple (A, B) :

A	B	$A \Rightarrow B$
F	F	V
F	V	V
V	V	V
V	F	F

Ainsi, le cas où A est fausse ne nous intéresse pas vraiment car on est sûr que l'implication sera vraie quelle que soit la valeur de vérité de B.

Ainsi, $A \Rightarrow B$ étant vraie, on peut dire que :

- SI A (est vraie) ALORS B (est vraie).
- A est vraie SEULEMENT SI B est vraie.
- IL SUFFIT que A soit vraie pour que B soit vraie.
- IL FAUT que B soit vraie pour que A soit vraie.
- A est une **condition suffisante** de B.
- B est une **condition nécessaire** de A.

Exemple

Soit A la proposition : x est un entier naturel. Soit B la proposition : x est positif.

Les propositions suivantes sont vraies :

- SI x est un entier naturel ALORS x est positif.
- IL SUFFIT que x soit un entier naturel pour que x soit positif.
- IL FAUT que x soit positif pour que x soit un entier naturel.
- x est un entier naturel SEULEMENT SI x est positif.
- x entier naturel est une **condition suffisante** de x positif.
- x positif est une **condition nécessaire** de x entier naturel.

On a bien « x est un entier naturel » implique que « x est positif » ($A \Rightarrow B$ est vraie).

Remarque

*$B \Rightarrow A$ est la proposition **réciproque** de $A \Rightarrow B$.*

Contraposée

Reprenons notre exemple : SI x *n'est pas* positif ALORS x ne peut pas être un entier naturel.

On note $\neg A$ la **négation** de A. L'observation précédente signifie que $\neg B \Rightarrow \neg A$. Est-ce toujours le cas? Dressons la table !

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
F	F	**V**	V	V	**V**
F	V	**V**	F	V	**V**
V	V	**V**	F	F	**V**
V	F	**F**	V	F	**F**

Ainsi, dans tous les cas, $A \Rightarrow B$ et $\neg B \Rightarrow \neg A$ ont la même valeur de vérité.

Ainsi, dans certains cas, pour démontrer une implication, il sera parfois plus simple de démontrer la contraposée.

Remarque

Dans un théorème du cours de mathématiques sous la forme SI hypothèse ALORS conclusion, on a en fait une implication « hypothèse $\Rightarrow$ conclusion ».

- *Si on a l'hypothèse vérifiée et le théorème démontré alors on peut en déduire que la conclusion est vraie. C'est le modus ponens.*
- *Si on a le contraire de la conclusion vérifié et le théorème démontré, alors on peut en déduire que le contraire de l'hypothèse est vrai. C'est le modus tollens.*
- *Par exemple, en supposant que la proposition « x est un entier naturel implique que x est positif » est un théorème, 3 étant un entier naturel, on en déduit que 3 est positif.*
- *On peut aussi dire que comme -3 n'est pas positif, on en déduit que -3 n'est pas un entier naturel.*

Contraire (négation) d'une implication

On voudrait savoir si la proposition « un nombre est positif implique que ce nombre est un entier naturel » (i.e. $B \Rightarrow A$) est vraie.

On « sent » bien que non. Par exemple $\sqrt{2}$ est bien positif (hypothèse vraie) mais pourtant ce n'est pas un entier naturel (conclusion fausse).

Si on formalise, on a B ET $\neg A$. Est-ce que par hasard B ET $\neg A$ ne serait pas la négation de $B \Rightarrow A$?

C'est quoi ET ? Pour être en accord avec le *bon sens*, on dira que P ET Q est vrai si, et seulement si, les deux propositions P et Q sont simultanément vraies. On note cet opérateur $\wedge$.

B	A	$\neg A$	$B \wedge \neg A$	$B \Rightarrow A$
F	F	V	F	V
F	V	F	F	V
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F

Bingo ! Les deux propositions sont bien contraires. Or une proposition et son contraire ne peuvent pas être vraies simultanément (c'est ce qu'on appelle le **tiers exclu**).

Puisque $B \wedge \neg A$ est vrai (dans le cas de $\sqrt{2}$), c'est que son contraire, $B \Rightarrow A$, est faux.

Quantificateurs

Un pour tous : ∀

Il y a quelque chose de pas très clair cependant. On a parlé d'un certain x, ou d'un certain entier… C'est un peu flou.

Il vaudrait mieux écrire que notre théorème est en fait :

« Quel que soit le nombre x, si x est un entier naturel alors il est positif. »

Plus formellement, on a l'habitude de noter cela :

$$(\forall x)(x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \geq 0)$$

Ce symbole ∀ se lit « pour tout » (notation introduite par l'Allemand Gentzen en 1933 : « pour tout » se dit *für Alle* en allemand, d'où le A à l'envers).

Un pour l'existence : ∃

Nous avons établi qu'il existait **au moins** un nombre positif ($\sqrt{2}$) qui n'était pas un entier naturel. Cela s'écrit formellement :

$$(\exists x)(x \geq 0 \wedge x \notin \mathbb{N})$$

Ce symbole ∃ se lit « il existe *au moins* » (on le doit au britannique Bertrand Russell dans ce contexte).

Il existe une variante : (∃!) qui signifie « il existe un UNIQUE élément ».

Quantificateurs et négation

Quand ce n'est pas vrai pour tous, c'est que c'est faux pour au moins un.

Quand ce n'est pas vrai pour au moins un, c'est que c'est faux pour tous.

Ainsi, si on note $P(x)$ une certaine propriété dépendant de x :

$$\neg((\exists x)(P(x))) \equiv (\forall x)(\neg P(x))$$

et

$$\neg((\forall x)(P(x))) \equiv (\exists x)(\neg P(x))$$

avec $\equiv$ signifiant « a la même valeur de vérité que ».

La dernière proposition renvoie à la recherche de **contre-exemple** : pour démontrer que quelque chose n'est pas toujours vrai, il faut exhiber un cas où cette chose est fausse.

À retenir Bien repérer les quantificateurs dans les énoncés de propositions permet de donner des pistes de démonstrations.

Remarque

Souvent, on contracte l'écriture $(\forall x)(x \in \mathbb{R})$ *en* $(\forall x \in \mathbb{R})$.

Réciproque/Équivalence

Lorsqu'on a établi qu'une implication était vraie, on a souvent envie de vérifier l'implication *réciproque* (i.e. avec la « flèche dans l'autre sens »).

Si c'est le cas, on utilise le symbole $\Leftrightarrow$:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \equiv (A \Leftrightarrow B)$$

On lit « A est équivalent à B » ou « A **si, et seulement si,** B ».

Exemple

On voudrait vérifier que deux nombres sont égaux **si, et seulement si,** leurs carrés sont égaux.

Nous voudrions donc voir si la proposition suivante est vraie :

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y)$$

Pour démontrer une équivalence, on procède souvent par **double inclusion**.

- $\boxed{x = y \Rightarrow x^2 = y^2}$ Ce sens est assez évident puisque, pour tous réels x et y : $x^2 = x \times x = y \times y = y^2$ (car $x = y$). Ainsi :

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x = y \Rightarrow x^2 = y^2)$$

- $\boxed{x = y \Leftarrow x^2 = y^2}$ On sent qu'il y a un problème en tant qu'élève bien entraîné(e). En effet, $(-2)^2 = 2^2$ et pourtant $-2 \neq 2$. Plus formellement :

$$(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x^2 = y^2 \wedge \neg(x = y))$$

ou encore (*cf.* la négation de l'implication, page 4) :

$$\neg((\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x^2 = y^2 \Rightarrow x = y))$$

ce qui traduit que l'implication dans ce sens est fausse, donc que l'équivalence est fausse.

1.2 Raisonnement par récurrence

Récursion, récurrence, induction

…des mots qui tournent autour du même thème mais qu'il faut savoir distinguer.

- En informatique, une *fonction récursive* (ou un *type récursif*) est une fonction (ou un type) qui fait référence à elle(lui)-même dans sa définition. Ce mécanisme est très puissant et permet de condenser l'écriture d'un programme.

C'est le principe de la mise en abyme… comme dans le dessin de La Vache qui rit®…

Par exemple, pour calculer la somme S_n des entiers de 1 à n, on peut dire que $S_1 = 1$ et que, pour tout entier $n \geq 2$, $S_n = n + S_{n-1}$. Cela donne en **Python** :

```
>>> def somme(n: int) -> int:
        if n == 1:
                return 1
        else:
                return n + somme(n - 1)
>>> somme(5)
15
```

- L'*induction* consiste à conclure à partir d'observations préalables : cela correspond à la démarche expérimentale classique. Sans précautions, cela peut conduire à certaines contre-vérités. Par exemple 3, 5 et 7 sont premiers donc on pourrait en déduire, par induction, que tous les nombres impairs à partir de 3 sont premiers, et pourtant…
- L'*induction mathématique* ou *raisonnement par récurrence* corrige ce défaut. On part toujours d'un résultat observé mais on **démontre** qu'il est vrai pour tous les éléments d'un ensemble donné, éventuellement infini. C'est l'induction expérimentale corrigée par la rigueur du raisonnement mathématique.

Principes de recurrence

C'est l'induction mathématique qui nous intéresse ici.

Théorème : principe de récurrence simple

Soit $\mathcal{P}_n$ une proposition ne dépendant que d'un entier n.

SI :

- *il existe un entier n_0 tel que $\mathcal{P}_{n_0}$ soit vraie ;*
- $(\forall n \geq n_0)(\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1})$

ALORS :

$$(\forall n \geq n_0)(\mathcal{P}_n) \text{ (sous-entendu, la proposition } \mathcal{P}_n \text{ est vraie)}$$

À retenir Vous vous souvenez que $A \Rightarrow B$ est toujours vrai si la proposition A est fausse. Donc le seul cas intéressant à envisager est celui où A est vraie. Alors, pour que l'implication soit vraie, il faut que B soit vraie aussi.

C'est pourquoi en Terminale on vous a souvent dit qu'il fallait démontrer que si la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie alors la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie aussi. Cela **suffit** à démontrer que l'implication est vraie.

Par exemple, nous allons essayer de prouver que la proposition bien connue suivante est vraie pour tout entier naturel n :

$$\mathcal{P}_n : « \ 0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \ »$$

- Il est facile de vérifier que $0=\frac{0(0+1)}{2}$, donc la deuxième étape de notre raisonnement est vérifiée, $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Supposons qu'une « génération », appelons-la par exemple la k-ième, soit « infectée ». Plus sobrement, on dira : soit k un entier supérieur à 1. Supposons que $\mathcal{P}_k$ soit vraie et essayons alors de démontrer que cela implique que la génération suivante, la $k+1$-ième, sera elle aussi infectée, ce qui se traduira par la proposition : $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$.

  Il s'agit donc de calculer $1+2+3+\cdots+k+(k+1)$ sachant que $1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$, or

$$\mathcal{P}_k \Rightarrow 1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)$$
$$=(k+1)\frac{k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$$

  Nous en déduisons que $(\forall k\in\mathbb{N})(\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1})$.
- Nous avons vérifié que la proposition était vraie au rang 0 et qu'elle était héréditaire. Nous en déduisons que la proposition sera toujours vraie, quel que soit l'entier naturel n grâce au principe de récurrence simple.

À retenir On retiendra donc la méthode suivante : 1. On expose clairement la proposition $\mathcal{P}_n$. 2. On vérifie que $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie : c'est le **pas initial** de la récurrence. 3. On démontre ensuite que $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$ pour n'importe quel entier $k\geq n_0$: c'est le passage du rang k au rang $k+1$ qui exprime que la proposition $\mathcal{P}_n$ est **héréditaire**. 4. Il reste à **conclure** en annonçant que, d'après le principe de récurrence simple, la proposition est vraie pour tout entier naturel $n\geq n_0$.

Théorème : principe de récurrence à deux pas

Soit $\mathcal{P}_n$ une proposition ne dépendant que d'un entier n.

SI :

- *il existe un entier n_0 tel que $\mathcal{P}_{n_0}$ et $\mathcal{P}_{n_0+1}$ soient vraies ;*
- $(\forall n\geq n_0)(\mathcal{P}_n \wedge \mathcal{P}_{n+1} \Rightarrow \mathcal{P}_{n+2})$

ALORS :

$$(\forall n\geq n_0)(\mathcal{P}_n)$$

Par exemple, on pose $F_0=F_1=1$ et $(\forall n\geq 0)(F_{n+2}=F_{n+1}+F_n)$ (c'est la suite dite de Fibonacci).

On veut démontrer que $(\forall n\geq 0)\left(0\leq F_n\leq\left(\frac{5}{3}\right)^n\right)$:

- Notons, pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}_n$: « $0\leq F_n\leq\left(\frac{5}{3}\right)^n$ ».
- On vérifie aisément que $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies.
- $\mathcal{P}_n \wedge \mathcal{P}_{n+1} \Rightarrow 0+0\leq F_{n+2}\leq\left(\frac{5}{3}\right)^n+\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}$

Or $\left(\frac{5}{3}\right)^n + \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1} = \left(\frac{5}{3}\right)^{n+2} \times \left(\frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^{n+2} \times \frac{24}{25} \leq \left(\frac{5}{3}\right)^{n+2} \times 1$

On a donc démontré que $(\forall n \geq 0)(\mathcal{P}_n \wedge \mathcal{P}_{n+1} \Rightarrow \mathcal{P}_{n+2})$.

- Ainsi, d'après le principe de récurrence à deux pas, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

Théorème : principe de récurrence forte

Soit $\mathcal{P}_n$ une proposition ne dépendant que d'un entier n.

SI :

- *il existe un entier n_0 tel que $\mathcal{P}_{n_0}$ soit vraie ;*
- $(\forall n \geq n_0)(\mathcal{P}_{n_0} \wedge \mathcal{P}_{n_0+1} \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}_{n-1} \wedge \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1})$

ALORS :

$$(\forall n \geq n_0)(\mathcal{P}_n)$$

On pourra par exemple démontrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^\star)(a_n = 3n)$ avec $a_1 = 3$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^\star)(a_{n+1} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k)$.

À retenir Attention à vérifier que la proposition ne dépend que d'un entier et pas d'un réel quelconque. Attention à ne pas tomber dans le piège classique de rédaction : « supposons que la proposition soit vraie **pour tout** *n* » au lieu de « **pour un certain** *n* ». Si vous démontrez $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ sans utiliser le fait que $\mathcal{P}_n$ soit vraie, c'est que vous n'avez pas besoin d'utiliser le principe de récurrence et qu'une démonstration directe suffit.

Les grands types de raisonnements : le résumé

Voici résumées les méthodes classiques de raisonnement qui seront utiles en mathématiques.

Avec les quantificateurs

- Pour démontrer que, quel que soit $x \in E$, $P(x)$, on choisit un élément **quelconque** x de E et on démontre la propriété $P(x)$. Ceci se fait à l'aide de la phrase « Soit $x \in E$ » suivie d'un raisonnement abstrait (ou d'un calcul littéral) considérant x comme une quantité fixée une bonne fois pour toutes.
- Pour démontrer qu'il existe un $x \in E$ vérifiant $P(x)$, on l'exhibe. Soit explicitement, soit à l'aide d'une construction abstraite plus difficile…
- Pour démontrer qu'un **unique** $x \in E$ vérifie $P(x)$, la plupart du temps on choisit deux éléments x et y de E et on démontre que la véracité de $P(x)$ et de $P(y)$ implique $x = y$.
- Pour démontrer qu'il n'existe pas de $x \in E$ vérifiant $P(x)$, on démontre que $\forall x \in E,$ non $P(x)$.

Pour démontrer une implication

- Le raisonnement direct. De la propriété P, on arrive à déduire l'énoncé Q. Techniquement, on suppose P vraie et on démontre que Q est (nécessairement) vraie.
- La raisonnement par la **contraposée**. Ce type de raisonnement repose sur la règle « $(A \Rightarrow B)$ a la même valeur de vérité que $(\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$ ».

- Le raisonnement par l'**absurde**. On prend comme hypothèse à la fois l'énoncé P et l'énoncé *non* (Q), c'est-à-dire la négation de l'implication que l'on cherche à démontrer. Il s'agit de démontrer qu'une telle hypothèse est absurde. Si la négation de l'implication est absurde, on en déduit que l'implication est vraie (principe du tiers exclu).
- Une **disjonction de cas**. Ce raisonnement est acceptable à condition de bien faire une étude de tous les cas possibles.

Raisonnement par récurrence

Déjà abondamment commenté.

Pour démontrer une équivalence

- On peut démontrer une équivalence par **double implication**.
- On peut aussi procéder par **analyse-synthèse** :
  - **phase d'analyse** : on recherche des conditions $(\mathcal{C})$ nécessaires pour une certaine hypothèse $(\mathcal{H})$;
  - **phase de synthèse** : on contrôle le caractère suffisant (ou pas) de ces conditions. Une fois trouvées des conditions nécessaires et suffisantes, on conclut : $(\mathcal{H}) \Leftrightarrow (\mathcal{C})$.

1.3 Ensembles

Définition

La théorie des ensembles a bouleversé les mathématiques à partir des travaux de Georg Cantor dès la fin du XIXe siècle. Cette section n'est qu'une très courte introduction. Les curieux pourront, outre Cantor, aller découvrir qui était Russell que nous avons déjà évoqué.

Nous nous contenterons de la définition donnée par Cantor lui-même :

Définition : ensemble

*Par ensemble, nous entendons toute collection M d'objets m de notre intuition ou de notre pensée, définis et **distincts**, ces objets étant appelés les **éléments** de M.*

On note $m \in M$ qu'on lit « m appartient à M ».

Ou encore $M \ni m$ qu'on lit « M contient m ».

En `Python`, on dispose de `in` pour vérifier qu'un élément appartient à une collection :

```
In [1]: 3 in [1, 2, 3]
Out[1]: True

In [2]: 'a' in 'papa'
Out[2]: True

In [3]: 42 in range(100)
Out[3]: True
```

Inclusion

Définition : inclusion

Si $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$ *alors on note cela* $A \subseteq B$ *ou* $B \supseteq A$ *et on lit « A* ***est inclus dans*** *B » ou « B* ***contient*** *A ».*

Vous noterez la correspondance entre inclusion des ensembles et implication des appartenances.

Remarques

- *On devrait distinguer* $\subsetneq$*, l'inclusion stricte, et* $\subseteq$*, l'inclusion au sens large. Dans la plupart des textes cependant, on utilise* $\subset$ *pour représenter les deux cas.*
- *Pour dire qu'un ensemble* ***n'est pas*** *inclus dans un autre, on utilise le symbole* $\not\subseteq$ *(à ne pas confondre avec* $\subsetneq$*).*
- *Pour démontrer que l'ensemble A n'est pas inclus dans l'ensemble B, on doit nier la définition de l'inclusion :* $\neg((\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)) \equiv (\exists x)(\neg(x \in A \Rightarrow x \in B)) \equiv (\exists x)(x \in A \wedge x \notin B)$*. Ceci signifie qu'il existe au moins un élément de A qui n'est pas un élément de B et confirme la signification intuitive du fait que A n'est pas inclus dans B.*

Vous veillerez à ne pas utiliser les symboles logiques comme des abréviations dans vos copies : soit tout est symbolique, soit tout est en français.

Avec Python

Pour vérifier qu'une collection est incluse dans une autre, on pourrait être tenté d'utiliser `in` mais c'est évidemment à proscrire car `[1, 2]` n'est pas un élément de `[1, 2, 3]`, ce qui se traduit par :

```
In [4]: [1, 2] in [1, 2, 3]
Out[4]: False
```

`Python` possède une structure de données dénommée `set` (« ensemble », en anglais). Les éléments, comme pour les ensembles définis juste au-dessus, ne sont pas ordonnés : on ne s'occupe que de l'appartenance. Il existe des fonctions prédéfinies pour vérifier qu'un ensemble est inclus dans un autre mais cette structure bien pratique n'est malheureusement pas au programme.

On va donc « simuler » des ensembles avec des listes et, pour vérifier qu'un ensemble est inclus dans un autre, on va vérifier que tous les éléments de l'un sont dans l'autre :

```
def est_inclus(ens1: list, ens2: list) -> bool:
    for el1 in ens1:
        if el1 not in ens2:
            return False
    return True


In [5]: est_inclus([2, 3], [3, 1, 2])
Out[5]: True
```

Égalité

Définition : égalité

On dit que deux ensembles A et B sont égaux et on note $A = B$ si, et seulement si :

$$(\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Remarques

- *On note le lien entre égalité des ensembles et équivalence des propositions.*
- *Pour démontrer que deux ensembles sont égaux, on procède souvent par double inclusion (à rapprocher de la démonstration par double implication puisqu'il y a une équivalence dans la définition de l'égalité de deux ensembles).*

Avec Python

On a un problème en utilisant des listes qui tiennent compte de l'ordre et des répétitions :

```
>>> [1, 2, 3] == [3, 2, 1]
False

>>> [1, 1, 2, 3] == [1, 2, 3]
False
```

Pour y remédier, on peut par exemple utiliser la fonction `est_inclus` précédente :

```
def est_egal(ens1: list, ens2: list) -> bool:
    return est_inclus(ens1, ens2) and est_inclus(ens2, ens1)
```

Définitions par extension / par compréhension

Quand on peut nommer tous les éléments d'un ensemble, on dit qu'on donne la définition en extension de cet ensemble. Par exemple, l'ensemble des nombres entiers naturels pairs inférieurs à 7 est $P_7 = \{0,2,4,6\}$.

Parfois il est beaucoup trop long voire impossible de donner une définition par extension. On peut alors donner une propriété qui caractérise cet ensemble. Par exemple :

$$P = \{p \in \mathbb{Z} \mid (\exists k \in \mathbb{Z})(x = 2 \times k)\}$$

caractérise l'ensemble des entiers pairs. On aurait pu aussi écrire :

$$P = \{2 \times k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

On dit qu'on définit l'ensemble.

C'est un moyen qui a inspiré de nombreux langages de programmation dont `Python`.

```
In [1]: ns1 = [2*n for n in range(10)]

In [2]: ns1
Out[2]: [0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18]

In [3]: ns2 = [n for n in range(20) if n%2 == 0]

In [4]: ns2
Out[4]: [0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18]
```

Intersection

Définition : intersection

On appelle ***intersection*** *des deux ensembles A et B et on note $A \cap B$ (A inter B) l'ensemble défini par :*

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$$

Remarque

Cette fois, on voit le lien entre le symbole $\cap$ des ensembles et le symbole $\wedge$ de la logique des propositions.

Avec Python

```
In [1]: A = [1, 2, 3, 4, 5]

In [2]: B = [2, 4, 6, 8]

In [3]: [x for x in A if x in B]
Out[3]: [2, 4]

In [3]: [x for x in range(10) if x in A and x in B]
Out[3]: [2, 4]
```

Réunion

On a parlé en logique de ET mais quid de OU ? En fait, il existe deux OU : l'*inclusif* et l'*exclusif*. Il est intéressant de savoir lequel est utilisé dans la proposition « fromage OU dessert » : ai-je le droit de prendre les deux (cas *inclusif*) ou non (cas *exclusif*) ?

En logique, on note le OU *inclusif* $\vee$ et le OU *exclusif* $\oplus$.

Définition : réunion

On appelle réunion des deux ensembles A et B et on note $A \cup B$ (A union B) l'ensemble défini par :

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$$

Remarque

On voit le lien entre le symbole $\cup$ des ensembles et le symbole $\vee$ de la logique des propositions.

Avec Python

```
In [1]: A = [1, 2, 3, 4, 5]

In [2]: B = [2, 4, 6, 8]

In [3]: [x for x in range(10) if x in A or x in B]
Out[3]: [1, 2, 3, 4, 5, 6, 8]
```

Différence

Définition : différence

On appelle différence des deux ensembles A et B et on note $A \setminus B$ (A privé de B) l'ensemble défini par :

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B)$$

Par exemple, $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ désigne l'ensemble des entiers naturels supérieurs (ou égaux) à 2.

Avec Python

```
In [1]: A = [1, 2, 3, 4, 5]

In [2]: B = [2, 4, 6, 8]

In [3]: [x for x in range(10) if x in A and x not in B]
Out[3]: [1, 3, 5]
```

Ensembles de nombres

Rappelons les notations introduites au lycée :

- $\mathbb{N}$ comme entiers Naturels : 0, 1, 2, 3…
- $\mathbb{Z}$ comme les (Z)entiers (relatifs) : …–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3… Il s'agit de la réunion de $\mathbb{N}$ avec l'ensemble de toutes les solutions des équations $x + n = 0$ avec n un entier naturel.
- $\mathbb{D}$ comme Décimal. Il s'agit des nombres dont l'écriture en base 10 est « finie ». Plus rigoureusement :

$$x \in \mathbb{D} \Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{Z})(\exists k \in \mathbb{Z})(x = k \times 10^p)$$

- $\mathbb{Q}$ comme rationnel. Il s'agit de l'ensemble de toutes les solutions des équations $n \times x = p$ avec n un entier et p un entier naturel non nul :

$$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{Z})(\exists n \in \mathbb{N}^\star)(n \times x = p)$$

  On note l'unique solution de $n \times x = p$ sous la forme $\dfrac{p}{n}$.

- $\mathbb{R}$ comme Réel. Là les choses se compliquent. Une définition rigoureuse de ce qu'est un nombre réel ne sera au programme que des MPSI/MP2I. On se contentera de ce qu'on vous a dit en classe de Seconde : c'est l'ensemble des abscisses des points d'une droite. Il y a bien sûr beaucoup de choses à dire sur les réels. Nous en reparlerons plus tard.
- $\mathbb{C}$ comme Complexe. $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ avec i l'unique nombre vérifiant $i^2 = -1$. Les nombres complexes ne sont plus vus par tout le monde au lycée depuis 2020. Certains les découvriront donc en prépa.

Remarques

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- *On note abusivement $A^\star$ l'ensemble $A \setminus \{0\}$ avec A l'un des ensembles ci-dessus.*

Intervalles de $\mathbb{R}$

Vous avez découvert les intervalles en Seconde.

Définition : intervalles de $\mathbb{R}$

Soit I un ensemble de réels. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$(\forall x \in I)(\forall y \in I)(\forall z \in \mathbb{R})(x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I)$$

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est plus prosaïquement un ensemble de réels SANS TROU.

Par exemple, $\mathbb{R}^\star$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$. En effet, prenons $x = -1$, $y = 1$ et $z = 0$: $x \leq z \leq y \wedge z \notin \mathbb{R}^\star$.

Intervalles de $\mathbb{Z}$

De la même manière, on définit des intervalles entiers avec des doubles crochets (avec ses pendants ouverts).

Définition : intervalles de $\mathbb{Z}$

$$[\![n, p]\!] = \{k \in \mathbb{Z} \mid n \leq k \leq p\}$$

1.4 Exercices

Test 1.1 (Condition nécessaire/suffisante - ❤)

Deux nombres de carrés égaux sont-ils égaux ?

Test 1.2 (❤)

On considère les propositions atomiques B, T, V, C représentant les assertions suivantes : « Hélène est belle », « Hélène aime le thé vert », « Hélène porte une robe violette », « Chri-Chri aime Hélène ».

1. Énoncez des phrases simples traduisant les propositions suivantes :

(a) $\neg B$ (c) $\neg(B \vee T)$ (e) $C \Rightarrow (B \Leftrightarrow V)$

(b) $\neg B \wedge \neg T$ (d) $(B \wedge V) \Rightarrow C$ (f) $((B \vee T) \wedge \neg V) \Rightarrow \neg C$

2. Traduisez par une proposition simple les phrases
   (a) « Chri-Chri aime Hélène seulement si elle porte une robe violette ».
   (b) « Chri-Chri aime Hélène si elle porte une robe violette ».
   (c) « Chri-Chri aime Hélène si, et seulement si, elle porte une robe violette ».
   (d) « Si Chri-Chri aime Hélène alors elle porte une robe violette ».
   (e) « Si Hélène porte une robe violette alors Chri-Chri l'aime ».
   (f) « Il est suffisant qu'Hélène porte une robe violette pour que Chri-Chri l'aime ».
   (g) « Il est nécessaire qu'Hélène porte une robe violette pour que Chri-Chri l'aime ».

Test 1.3 (❤)

Réécrivez les phrases suivantes pour qu'elles soient équivalentes au sens de la logique des propositions en utilisant « suffisant » ou « necessaire » :

1. Si ses poules ne se lavent pas les dents, il ne vient pas en cours.

2. Si je range ma chambre, Hélène ne m'aimera pas.

Test 1.4 (❤)

Déterminez les contraposées, les réciproques puis les négations des propositions suivantes (vous énoncerez les propositions dans le même langage courant) :

1. Si Max n'étudie pas son cours de maths, les filles le fuient.

2. Héloïse marquera un but seulement si elle lit la vie de Carl Gauss en latin.

Test 1.5 (❤)

1. Démontrez, à l'aide de tables de vérité :
   (a) que p => q a la même valeur de vérité que $\neg p$ v q ;
   (b) la première loi de De Morgan de la logique des propositions : $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$;
   (c) la distributivité de la disjonction $\vee$ sur la conjonction $\wedge$.

2. Démontrez les mêmes propriétés pour les lois ensemblistes :
   (a) la première loi de De Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
   (b) la distributivité de la réunion $\cup$ sur l'intersection $\cap$.

Test 1.6 (❤)

L'implication est-elle associative ?

Test 1.7 (❤)

Que signifie : « Il ne m'arrive jamais de n'avoir à me plaindre de rien » ?

Test 1.8 (❤)

Démontrez que le produit d'un irrationnel par un rationnel non nul est toujours un irrationnel. Avez-vous raisonné par l'absurde ou par contraposée ?

Test 1.9 (❤❤)

Formulez les phrases suivantes en utilisant uniquement des symboles mathématiques, notamment ceux de la logique des prédicats :

1. L'entier n est le carré d'un entier.

2. Le cercle unité possède un point à coordonnées rationnelles.

3. Les ensembles A et B ne sont pas disjoints.

4. Les ensembles A et B sont distincts.

5. Les éléments de A sont des éléments de B.

6. Tout réel positif est un carré de réel.

7. L'équation $f(x)=0$ ne possède pas de solution entière.

8. La fonction f s'annule sur tout intervalle réel de longueur 3.

9. Tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contient un rationnel.

10. La fonction f ne s'annule pas sur $[a,b]$.

11. Tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'amplitude 1 contient un nombre entier.

Test 1.10 (❤)

Soit un ensemble de 50 Na'vis, qui sont soit mâle, soit femelle, et soit bleu, soit vert. On considère les énoncés suivants :

- P : « Tout mâle est bleu ».
- Q : « Il existe un mâle bleu et il existe une femelle bleue ».

1. P se traduit par « mâle » $\Rightarrow$ « bleu ». Donnez la contraposée de cette implication.

2. Donnez la négation de P, puis la négation de Q.

3. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? Dans l'ensemble des 50 Na'vis :

(a) Pour prouver que P est vrai, il suffit de vérifier que tous les Na'vis verts sont des femelles.

(b) Pour prouver que P est faux, il est nécessaire de vérifier que tous les mâles sont verts.

(c) Pour prouver que Q est vrai, il suffit de trouver une femelle bleue.

(d) Pour prouver que Q est vrai, il est nécessaire de trouver une femelle bleue.

(e) Pour prouver que Q est faux, il est nécessaire de vérifier que les 50 Na'vis sont verts.

Test 1.11 (❤)

$E=\{0,1,2,3,4,5,6\}$. Définissez en extension les ensembles suivants :

1. $A_1=\left\{x\in\mathbb{N} \mid x^2\in E\right\}$

2. $A_2=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x^2\in E\right\}$

3. $A_3=\left\{x\in E \mid x^2\in E\right\}$

4. $A_4=\left\{x\in E \mid \sqrt{x}\in E\right\}$

5. $A_5=\{x\in E \mid 2x\in E\}$

6. $A_6=\left\{x\in E \mid \frac{x}{2}\in E\right\}$

Question subsidiaire : comment obtenir les quatre dernières réponses avec Python ?

Test 1.12 (❤)

$E = \{0,1,2,3,4\}$. Complétez, lorsque c'est possible, par un des symboles (il peut y avoir plusieurs solutions, mais on s'obligera à choisir celle qui donne le plus de « renseignements ») :

$$\in,\ \ni,\ \notin,\ \subseteq,\ \supset,\ =,\ \neq,\ \subsetneq,\ \nsubseteq, \cdots$$

1. $2 \cdots E$

2. $\{2,3\} \cdots E$

3. $\{2\} \cdots E$

4. $\{2,3,4\} \cdots \{4,3,2\}$

5. $\{2,3,4\} \cdots \{4,3,0\}$

6. $\varnothing \cdots E$

7. $E \cdots E$,

8. $E \cdots \{\varnothing, E\}$

9. $\varnothing \cdots \{\varnothing E\}$

10. $E \cdots \{0,1,2,3,\ldots,10\}$

11. $\{0,1,2,3,4,5\} \cdots E$

Test 1.13 (❤)

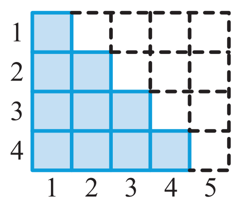
Écrivez par compréhension :

1. $\{\ldots,-64,-27,-8,-1,0,1,8,27,64,\ldots\}$

2. $\{1,5,9,13,17,21,25,\ldots\}$

Test 1.14 (Carrés récursifs - ❤)

Voici un test de fin d'étude maternelle en Syldavie : prenez un cube, placez en dessous deux autres cubes, et encore en dessous trois cubes, etc.



Combien y a-t-il de cubes verts au total sur le dessin ci-dessus ? On peut encore les compter à la main, mais que faire si je vous demande le nombre de cubes lorsqu'on a placé 100 rangées ? n rangées ?

Test 1.15 (❤❤❤)

Une suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 3,\ u_{n+1} = 10u_n - 9$$

Observez les premières valeurs, conjecturez une formule générale donnant u_n en fonction de n puis démontrez par récurrence votre conjecture.

Test 1.16 (Test de primalité - ❤)

Que pensez-vous de la proposition suivante ? :

« Les images des entiers naturels par la fonction $p : n \mapsto n^2 - n + 41$ sont des nombres premiers. »

Test 1.17 (Tout le monde a le même âge - ❤)

On se propose de démontrer que tous les étudiants en prépa ont le même âge et, pour cela, on note $P(n)$ l'affirmation :

« Si on choisit n étudiants en prépa ($n \in \mathbb{N}^*$), il est sûr qu'ils ont tous le même âge. »

Il est clair que $P(1)$ est vraie.

Démontrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Pour cela nous supposons que $P(n)$ est vraie (c'est l'hypothèse de récurrence) et nous choisissons un groupe quelconque de $n+1$ étudiants que nous ordonnons par ordre alphabétique (pourquoi pas ?). D'après l'hypothèse de récurrence, les n premiers de l'ordre alphabétique ont tous le même âge ainsi que les n derniers. Comme ces deux groupes de n étudiants ont au moins un étudiant en commun, on en déduit qu'ils ont tous le même âge.

Nous venons de démontrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour tout $n \geq 1$ et, comme $P(1)$ est vrai, $P(n)$ est toujours vrai pour tout $n \geq 1$. **Y a-t-il une erreur dans le raisonnement ?**

Test 1.18 (❤)

1. Voici un extrait du rapport d'une épreuve de concours en 2020 : *Un nombre très important de candidats pense que si $a \geq 4$ et $b \geq 4$ alors $\frac{a}{b} \geq \frac{4}{4} = 1$.*

Qu'en pensez-vous?

2. Sachant que $x \geq 1$, démontrez que $y = \dfrac{3x+1}{x+3}$ est aussi supérieur à 1.

3. Sachant que $x \geq 1$, déterminez le signe de $y - x$. On lit à ce sujet sur le rapport de jury : *La gestion parfois défaillante des règles de calculs algébriques entraîne que seuls 40 % des candidats fournissent une réponse correcte.*

4. Résolvez dans $[1, +\infty[$ l'équation $L = \dfrac{3L+1}{L+3}$. Toujours dans ce rapport de jury : *Il est surprenant de constater que la résolution de l'équation $L = \dfrac{3L+1}{L+3}$ pose problème à un nombre très important de candidats.*

Test 1.19 (❤❤)

Démontrez que toute fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifie :

$$(\forall n \in \mathbb{N})(f(n) \geq n)$$

Test 1.20 (❤❤)

Démontrez par récurrence que $(\forall x \in \mathbb{R}_+)(\forall n \in \mathbb{N})((1+x)^n \geq 1+nx)$ (inégalité de Bernoulli).

Test 1.21 (❤❤)

On considère la suite de Fibonacci définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Démontrez la formule (dite de Binet) : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

On utilisera le principe de récurrence double.

Coups de pouce

Coups de pouce pour le test 1.1

Notons C la proposition « les deux nombres ont leurs carrés égaux » et E « les deux nombres sont égaux ».
Il s'agit donc d'étudier la proposition C $\Rightarrow$ E.

Coups de pouce pour le test 1.2

Le langage courant peut paraître ambigu...Vous pouvez tenter de vous replacer dans un contexte sûr avec des propositions du type « Q est un quadrilatère », « Q est un carré », « Q est un parallélogramme », « Q est un rectangle », « Q est un losange »... si vous connaissez bien votre cours de collège ;-)

Coup de pouce pour le test 1.3

$A \Rightarrow B$ peut se lire « Il est suffisant que A soit réalisé pour que B le soit » ou, en passant à la contraposée « Il est nécessaire que B soit réalisé pour que A le soit » (si on n'a pas B alors on n'a pas A).

Coup de pouce pour le test 1.4

Déterminez A et B pour que les propositions soient de la forme $A \Rightarrow B$ puis appliquer les définitions du cours.

Coup de pouce pour le test 1.5

1. Il s'agit de démontrer $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ et $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ en dressant les tables de chaque membre de ces équivalences de formules.
2. Utilisez les résultats de la question **1.** et se souvenir que $A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$.

Coups de pouce pour le test 1.6

Est-ce que $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ est une tautologie ? On peut dresser une table de vérité ou bien être plus malin en essayant de déterminer un cas qui rende la proposition fausse.

Coups de pouce pour le test 1.7

L'emploi des doubles négations est un classique des entretiens d'embauches : il faut vous en débarrasser en vous souvenant que $\neg(\neg p) \equiv p$.

Coups de pouce pour le test 1.8

Un nombre r est rationnel si, et seulement si, il existe un couple d'entiers $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \dfrac{p}{q}$.
Il s'agit de vérifier la validité de :

$$(x \in \mathbb{Q} \wedge y \notin \mathbb{Q}) \Rightarrow xy \notin \mathbb{Q}$$

Coup de pouce pour le test 1.9

Il s'agit d'utiliser les quantificateurs $\exists$ et $\forall$. Il y a plusieurs possibilités d'écriture la plupart du temps.

Rappel : le cercle unité est l'ensemble des points à une distance 1 de l'origine du repère.

Coup de pouce pour le test 1.10

1. Un Na'vi étant soit bleu, soit vert, s'il n'est pas bleu, il est donc vert. De même pour le genre.
2. Notons N l'ensemble des Na'vis, M l'ensemble des mâles, F celui des femelles, et B l'ensemble des Na'vis bleus et V celui des verts. Écrivez P et Q en utilisant ces ensembles et des quantificateurs.

Coup de pouce pour le test 1.11

Définir en extension, c'est lister tous les éléments.

Coup de pouce pour le test 1.12

Il faut penser au type des objets : nombre ?, ensemble de nombres ?, ensemble d'ensembles de nombres ?

Pouce de pouce pour le test 1.13

Essayez de reconnaître un motif logique comme dans les tests de QI…

Coups de pouce pour le test 1.14

Le dessin nous donne une idée : si nous complétons la figure pour former un rectangle, il y a deux fois plus de cubes, mais maintenant nous pouvons les compter. Il y en a en effet $\dfrac{4 \times (4+1)}{2}$, et donc :

$$1+2+3+4 = \frac{4 \times (4+1)}{2}$$

Coup de pouce pour le test 1.15

On observe : $u_0 = 3$, $u_1 = 21$, $u_2 = 201$, $u_3 = 2001$, $u_4 = 20001$…
Soit encore : $u_0 = 2+1$, $u_1 = 20+1$, $u_2 = 200+1$, $u_3 = 2000+1$, $u_4 = 20000+1$…

Coups de pouce pour le test 1.16

Trop beau pour être vrai, pourtant cela part bien : vrai pour 1, 2, 3, 4,...

Coups de pouce pour le test 1.17

Faites bien attention à l'initialisation.

Coup de pouce pour le test 1.18

Revoyez le cours sur la multiplication membre à membre. Rappelez-vous en particulier qu'on ne peut diviser membre à membre deux inégalités : il faut revenir à des multiplications par passage à l'inverse. Mais, pour cela, il faut avoir des nombres de même signe.

Coup de pouce pour le test 1.19

Raisonnez par récurrence sur n.

Coup de pouce pour le test 1.20

Pour l'hérédité, pensez que $(1+x)^{n+1} = (1+x) \times (1+x)^n$.

Coup de pouce pour le test 1.21

Pour l'hérédité, on pourra judicieusement factoriser et remarquer que $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1$.

Solutions et commentaires

Solution du test 1.1

Notons tout d'abord que la proposition E $\Rightarrow$ C est bien sûr vraie : si deux nombres sont égaux, leurs carrés le sont aussi (cette proposition reste vraie si les deux nombres ne sont pas égaux).

La contraposée $\neg$C $\Rightarrow$ $\neg$E nous permet alors de dire que si deux nombres n'ont pas le même carré, ils ne sont pas égaux.

Cependant, $(3)^2 = (-3)^2$ mais $3 \neq -3$. Ainsi on peut avoir C vraie mais E fausse : la proposition C $\Rightarrow$ E est donc fausse.

On remarque que cette formulation n'est pas satisfaisante car la proposition est parfois vraie (pour des nombres positifs par exemple) : il faudrait pouvoir être plus précis. Veut-on savoir si la proposition est vraie **pour tout** couple de nombres ou bien s'*il existe* un couple qui la rend fausse ?

Il faut alors passer de la **logique des propositions** à la **logique des prédicats** qui étudie les propositions dont la valeur de vérité dépend de certaines variables.

Vous étudierez ceci plus en détail l'an prochain et travaillerez notamment avec les **quantificateurs** $\forall$ et $\exists$.

Solution du test 1.2

1. (a) « Hélène n'est pas belle ».

(b) « Hélène n'est pas belle et n'aime pas le thé vert ».

(c) Difficile à exprimer en français si ce n'est sous la forme précédente car les deux propositions sont équivalentes d'après les lois de De Morgan.

(d) « Si Hélène est belle et porte une robe violette alors Chri-Chri l'aime ».

(e) « Si Chri-Chri aime Hélène, alors celle-ci est belle si, et seulement si, elle porte une robe violette ».

(f) « Si Hélène ne porte pas de robe violette et qu'elle est belle ou aime le thé vert, alors Chri-Chri ne l'aime pas ».

2. (a) C $\Rightarrow$ V

(b) V $\Rightarrow$ C

(c) C $\Leftrightarrow$ V

(d) C $\Rightarrow$ V

(e) V $\Rightarrow$ C

(f) V $\Rightarrow$ C

(g) C $\Rightarrow$ V

Solution du test 1.3

1. « Il est suffisant que les poules ne se lavent pas les dents pour qu'il ne vienne pas en cours » ou « Il est nécessaire qu'il ne vienne pas en cours pour que les poules ne se lavent pas les dents ».

2. « Il est suffisant que je range ma chambre pour qu'Hélène ne m'aime pas » ou « Il est nécessaire qu'Hélène ne m'aime pas pour que je range ma chambre ».

Solution du test 1.4

1. Appelons M la proposition : « Max n'étudie pas son cours de maths » et F la proposition « Les filles le fuient ». La proposition originale est donc $M \Rightarrow F$.

La contraposée est donc $\neg F \Rightarrow \neg$M : « Si les filles ne fuient pas Max alors il étudie son cours de maths ».

La réciproque est $F \Rightarrow M$: « Si les filles fuient Max alors il n'étudie pas son cours de maths ».

La négation est $M \wedge \neg F$: « Max n'étudie pas son cours de maths et les filles ne le fuient pas ».

2. Appelons H la proposition « Héloïse marquera un but » et G la proposition « Elle lit la vie de Carl Gauss en latin ». La proposition originale est donc $H \Rightarrow G$.

La contraposée est donc $\neg G \Rightarrow \neg H$: « Si Héloïse ne lit pas la vie de Carl Gauss en latin alors elle ne marquera pas de but ».

La réciproque est $G \Rightarrow H$: « Si Héloïse lit la vie de Carl Gauss en latin alors elle marquera un but ».

La négation est $H \wedge \neg G$: « Héloïse marque un but et n'a pas lu la vie de Carl Gauss en latin ».

Solution du test 1.5

1. (a)

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p => q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

On constate bien que ces deux propositions ont la même valeur de vérité. En français cela signifie que $p => q$ est vrai si, et seulement si, p est faux ou q est vrai.

Cela nous confirme également que le contraire de $p => q$ est $\neg(\neg p \vee q)$. c'est-à-dire $p \wedge \neg q$ d'après les lois de De Morgan.

(b) On vérifie que les colonnes correspondant à $\neg(p \wedge q)$ et à $\neg p \vee \neg q$ sont identiques :

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

(c) On fait de même avec $p \vee (q \wedge r)$ et $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1