MATHS

PC/PC*-PSI/PSI*-PT/PT*

Jean-Marie Monier | Guillaume Haberer

MATHS

PC/PC*-PSI/PSI*-PT/PT*

MÉTHODES & EXERCICES

4e édition

DUNOD

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-083661-1

Table des matières

Pour bien utiliser cet ouvrage vi

Remerciements ix

1 Algèbre linéaire 1

2 Déterminants 27

3 Valeurs propres, vecteurs propres 45

4 Réduction 65

5 Espaces préhilbertiens 101

6 Endomorphismes d'un espace vectoriel euclidien 113

7 Espaces vectoriels normés 131

8 Séries 160

9 Suites de fonctions 189

10 Séries de fonctions 206

11 Séries entières 242

12 Fonctions vectorielles 298

13 Courbes du plan (PT) 312

14 Intégration sur un intervalle quelconque 342

15 Intégrales à paramètre 379

16 Espaces probabilisés discrets 418

17 Variables aléatoires discrètes 448

18 Couples de variables aléatoires discrètes 474

19 Lois usuelles, approximations 499

20 Calcul différentiel 522

21 Équations différentielles linéaires (PSI, PT) 554

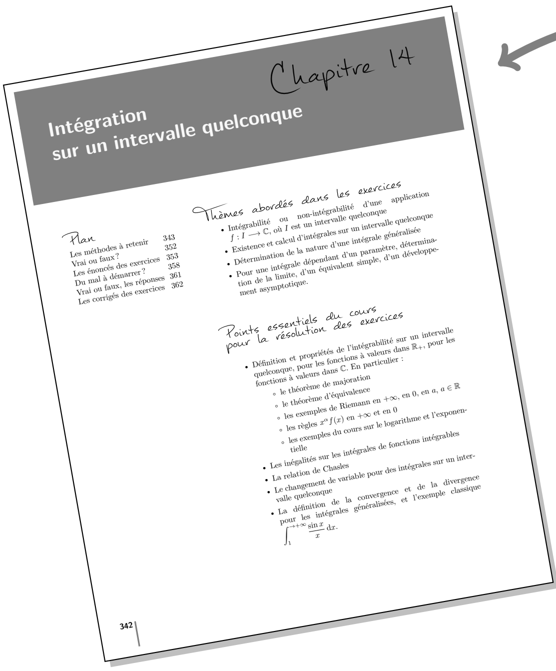
22 Courbes et surfaces dans l'espace (PT) 593

Index 609

Compléments en ligne

Des compléments en ligne, disponibles sur la page de présentation de l'ouvrage du site de Dunod (`https://dunod.com/EAN/9782100836611`), vous donnent accès à des exercices de colles entièrement corrigés.

Pour bien utiliser cet ouvrage



342

Chapitre 14

Intégration
sur un intervalle quelconque

Plan

Les méthodes à retenir	343
Vrai ou faux ?	352
Les énoncés des exercices	353
Du mal à démarrer ?	358
Vrai ou faux, les réponses	361
Les corrigés des exercices	362

Thèmes abordés dans les exercices

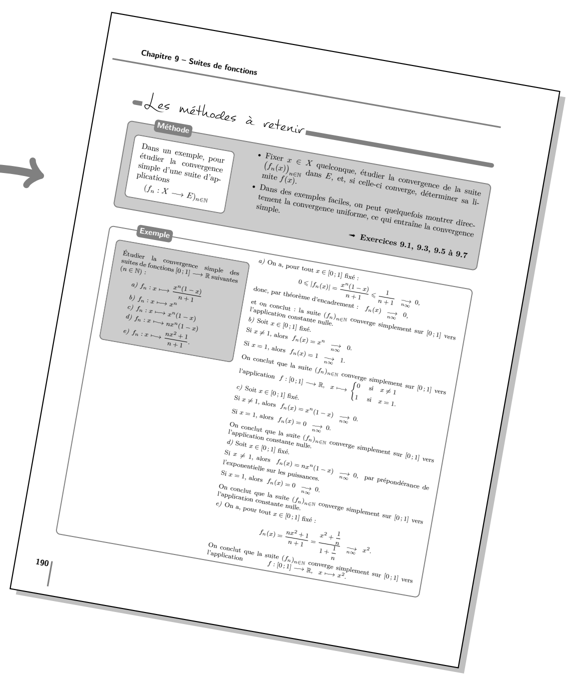
- Intégrabilité ou non-intégrabilité d'une application $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, où I est un intervalle quelconque
- Existence et calcul d'intégrales sur un intervalle quelconque
- Détermination de la nature d'une intégrale généralisée
- Pour une intégrale dépendant d'un paramètre, détermination de la limite, d'un équivalent simple, d'un développement asymptotique.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés de l'intégrabilité sur un intervalle quelconque, pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$. En particulier :
  - le théorème de majoration
  - le théorème d'équivalence
  - les exemples de Riemann en $+\infty$, en 0, en a, $a \in \mathbb{R}$
  - les règles $x^\alpha f(x)$ en $+\infty$ et en 0
  - les exemples du cours sur le logarithme et l'exponentielle
- Les inégalités sur les intégrales de fonctions intégrables
- La relation de Chasles
- Le changement de variable pour des intégrales sur un intervalle quelconque
- La définition de la convergence et de la divergence pour les intégrales généralisées, et l'exemple classique $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

La page d'entrée de chapitre

Elle propose un plan du chapitre, les thèmes abordés dans les exercices, ainsi qu'un rappel des points essentiels du cours pour la résolution des exercices.



Chapitre 9 – Suites de fonctions

Les méthodes à retenir

Méthode

Dans un exemple, pour étudier la convergence simple d'une suite d'applications $(f_n : X \longrightarrow E)_{n\in\mathbb{N}}$

- Fixer $x \in X$ quelconque, étudier la convergence de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ dans E, et, si celle-ci converge, déterminer sa limite $f(x)$.
- Dans des exemples faciles, on peut quelquefois montrer directement la convergence uniforme, ce qui entraîne la convergence simple.

➡ **Exercices 9.1, 9.3, 9.5 à 9.7**

Exemple

Étudier la convergence simple des suites de fonctions $[0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes ($n \in \mathbb{N}$) :

a) $f_n : x \longmapsto \dfrac{x^n(1-x)}{n+1}$
b) $f_n : x \longmapsto x^n$
c) $f_n : x \longmapsto x^n(1-x)$
d) $f_n : x \longmapsto nx^n(1-x)$
e) $f_n : x \longmapsto \dfrac{nx^2+1}{n+1}$.

a) On a, pour tout $x \in [0;1]$ fixé :
$$0 \leqslant |f_n(x)| = \frac{x^n(1-x)}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0,$$
donc, par théorème d'encadrement : $f_n(x) \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, et on conclut : la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers l'application constante nulle.

b) Soit $x \in [0;1]$ fixé.
Si $x \neq 1$, alors $f_n(x) = x^n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.
Si $x = 1$, alors $f_n(x) = 1 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 1$.
On conclut que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers l'application $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

c) Soit $x \in [0;1]$ fixé.
Si $x \neq 1$, alors $f_n(x) = x^n(1-x) \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.
Si $x = 1$, alors $f_n(x) = 0 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.
On conclut que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers l'application constante nulle.

d) Soit $x \in [0;1]$ fixé.
Si $x \neq 1$, alors $f_n(x) = nx^n(1-x) \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, par prépondérance de l'exponentielle sur les puissances.
Si $x = 1$, alors $f_n(x) = 0 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.
On conclut que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers l'application constante nulle.

e) On a, pour tout $x \in [0;1]$ fixé :
$$f_n(x) = \frac{nx^2+1}{n+1} = \frac{x^2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\infty}{\longrightarrow} x^2.$$
On conclut que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers l'application $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$.

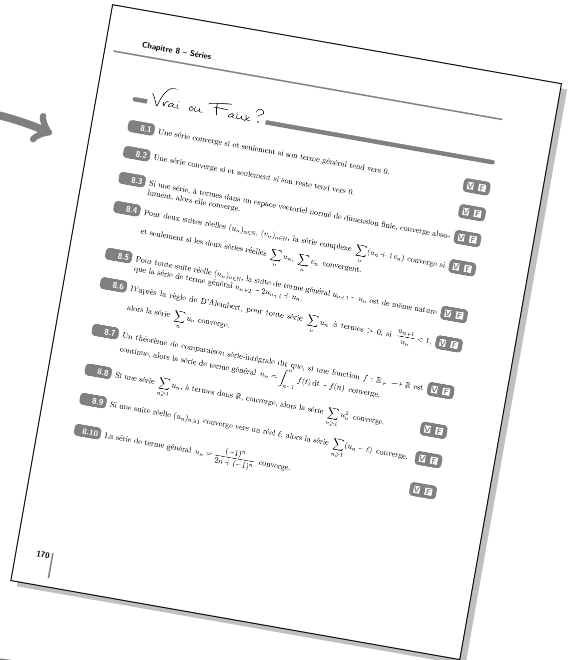
190

Les méthodes à retenir

Cette rubrique constitue une synthèse des principales méthodes à connaître, détaillées étape par étape, et indique les exercices auxquels elles se rapportent.
Chaque méthode est illustrée par un ou deux exemples qui la suivent.

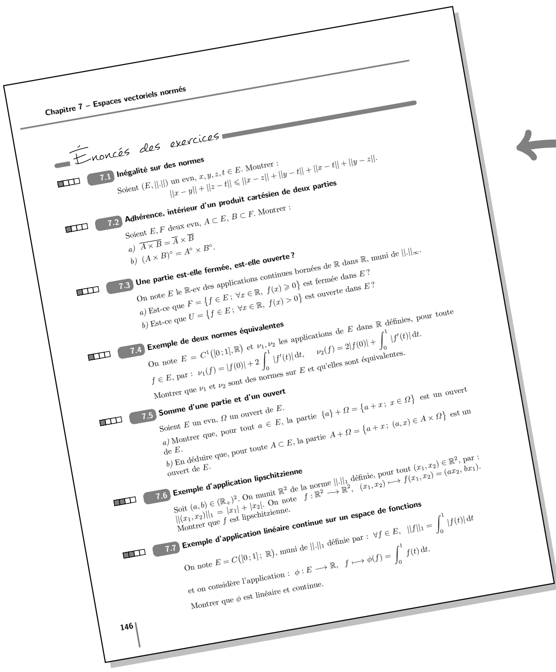
Vrai ou Faux ?

Dix questions pour vérifier la bonne compréhension du cours.



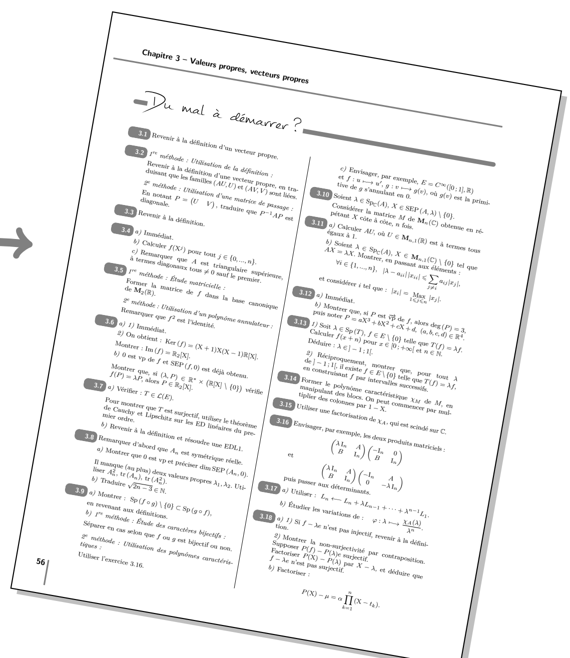
Énoncés des exercices

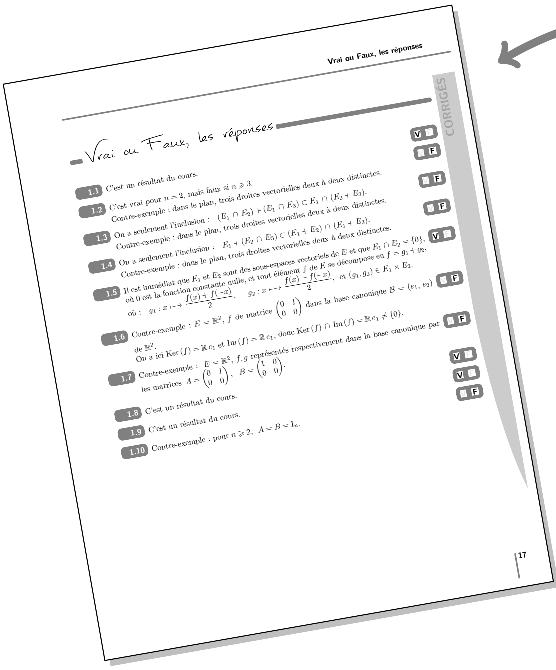
De nombreux exercices de difficulté croissante sont proposés pour s'entraîner. La difficulté de chaque exercice est indiquée sur une échelle de 1 à 4.



Du mal à démarrer ?

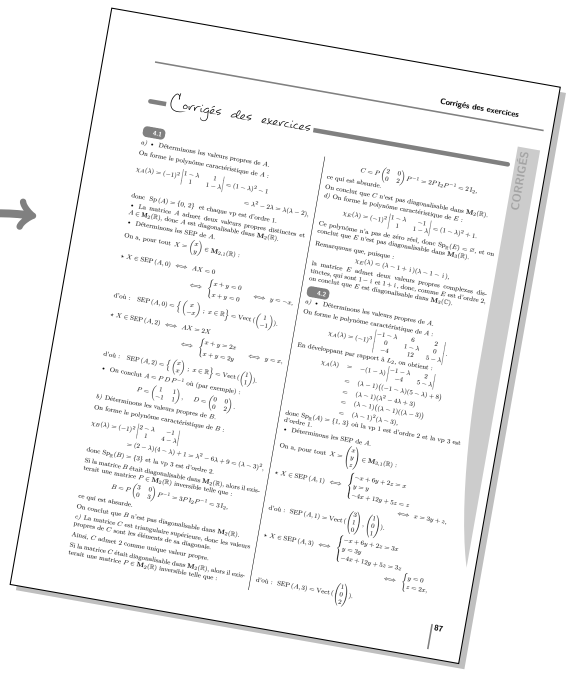
Des conseils méthodologiques sont proposés pour bien aborder la résolution des exercices.





Vrai ou Faux, les réponses

Chaque affirmation vraie est justifiée par une référence au cours ou une courte démonstration, et chaque affirmation fausse est réfutée par la production d'un contre-exemple explicite.



Corrigés des exercices

Tous les exercices sont corrigés de façon détaillée.

Remerciements

Nous tenons ici à exprimer notre gratitude aux nombreux collègues et amis qui ont accepté de réviser des parties du manuscrit :

> Marc Albrecht, Bruno Arsac, Jean-Philippe Berne, Gérard Bourgin, Jean-Paul Christin, Sophie Cohéléach, Carine Courant, Cyril Haberer, Sylvain Delpech, Hermin Durand, Viviane Gaggioli, Marguerite Gauthier, Cécile Lardon, Hadrien Larôme, Paul Pichaureau, Nathalie Planche, Philippe Saadé, Marie-Dominique Siéfert, Marie-Pascale Thon, Audrey Verdier, Skander Zannad.

Chapitre 1

Algèbre linéaire

Plan

Les méthodes à retenir 2
Vrai ou faux ? 10
Les énoncés des exercices 11
Du mal à démarrer ? 15
Vrai ou faux, les réponses 17
Les corrigés des exercices 18

Thèmes abordés dans les exercices

- Étude d'intersections, de sommes, de sommes directes de sev d'un ev
- Montrer qu'une famille, finie ou infinie, est libre, est liée
- Manipulation de projecteurs en dimension finie
- Obtention de factorisations de matrices
- Utilisation de décomposition en blocs pour des matrices
- Calculs sur des normes de matrices
- Étude de suites de matrices, de séries de matrices.

K désigne un corps commutatif.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Par commodité, on utilise les abréviations suivantes :

ev : espace vectoriel

sev : sous-espace vectoriel

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition de famille libre, famille liée, famille génératrice, finie ou infinie
- Définition et propriétés des sommes de sev, des sommes directes de sev
- Théorème d'isomorphisme pour les applications linéaires, et, en dimension finie, théorème du rang
- Définition et propriétés des formes linéaires, des hyperplans
- Trace d'une matrice carrée : définition, propriétés
- Manipulation des blocs
- Définition d'une norme sur $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, norme d'algèbre, continuité des opérations.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour obtenir des relations (souvent des inclusions) entre sev

Essayer de passer par les éléments.

➟ **Exercice 1.1**

Exemple

Soient E un K-ev, A, B, C des sev de E.
Montrer :

$$A + (B \cap C) \subset (A + B) \cap (A + C).$$

1re méthode : utilisation de propriétés globales :

On a : $B \cap C \subset B$, donc : $A + (B \cap C) \subset A + B$,
et de même : $B \cap C \subset C$, donc : $A + (B \cap C) \subset A + C$.
Il en résulte : $A + (B \cap C) \subset (A + B) \cap (A + C)$.

2e méthode : passage par les éléments :

Soit $x \in A + (B \cap C)$.
Il existe $a \in A$, $y \in B \cap C$ tels que : $x = a + y$.
Comme $a \in A$ et $y \in B$, on a : $x = a + y \in A + B$.
Comme $a \in A$ et $y \in C$, on a : $x = a + y \in A + C$.
D'où : $x \in (A + B) \cap (A + C)$.

Ceci montre l'inclusion demandée.

Méthode

Pour montrer que deux sev F, G d'un ev E sont supplémentaires dans E

Essayer de montrer :

- $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$
- il existe une base $\mathcal{F}$ de F et une base $\mathcal{G}$ de G telles que la famille $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$, obtenue par juxtaposition de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, est une base de E
- l'une des deux égalités $F \cap G = \{0\}$, $F + G = E$ et l'égalité portant sur les dimensions : $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$, si E est de dimension finie.

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sev de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ supplémentaires dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrons d'abord que $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sev de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

⋆ On a : $\mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et $0 \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.
On a, pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$:

$$(\alpha A + B)^\top = \alpha A^\top + B^\top = \alpha A + B,$$

donc : $\alpha A + B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.
Ceci montre que $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

⋆ On a : $\mathbf{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et $0 \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$.
On a, pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$:

$$(\alpha A + B)^\top = \alpha A^\top + B^\top = \alpha(-A) + (-B) = -(\alpha A + B),$$

donc : $\alpha A + B \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$.
Ceci montre que $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

2) $\star$ L'inclusion $\{0\} \subset \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ est évidente.
$\star$ Soit $A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$.
On a alors : $A^\top = A$ et $A^\top = -A$,
donc $A = -A$, $2A = 0$, puis $\frac{1}{2}2A = 0$, $A = 0$.
Ceci montre : $\mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{A}_n(\mathbb{R}) \subset \{0\}$.
On obtient : $\mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$.

3) $\star$ L'inclusion $\mathbf{S}_n(\mathbb{R}) + \mathbf{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est évidente.
$\star$ Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrons qu'il existe $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ telles que : $M = S + A$.
Raisonnons par analyse-synthèse.
Analyse :
Soient $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = S + A$.
On a alors, en transposant : $M^\top = (S+A)^\top = S^\top + A^\top = S - A$.
On déduit, par addition, soustraction, multiplication par $\frac{1}{2}$:

$$S = \frac{1}{2}(M + M^\top), \qquad A = \frac{1}{2}(M - M^\top).$$

Synthèse :
Notons $S = \frac{1}{2}(M + M^\top)$, $A = \frac{1}{2}(M - M^\top)$.
On a alors :

$$S^\top = \frac{1}{2}(M^\top + M) = S, \text{ donc } S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$$

$$A^\top = \frac{1}{2}(M^\top - M) = -A, \text{ donc } A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$$

$$S + A = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M^\top + \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}M^\top = M, \qquad \text{donc } (S, A) \text{ convient.}$$

Ceci montre : $\mathbf{S}_n(\mathbb{R}) + \mathbf{A}_n(\mathbb{R}) = \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Finalement, $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sev de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ supplémentaires dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple

Dans $E = \mathbb{R}^4$ usuel, on note :

$$a = (1,\ 1,\ 1,\ 1),$$
$$b = (1,\ 2,\ 3,\ 0),$$
$$c = (1,\ -1,\ 1,\ 4),$$
$$d = (1,\ 2,\ -3,\ 0),$$
$$F = \mathrm{Vect}\,(a, b), \quad G = \mathrm{Vect}\,(c, d).$$

Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Il est clair que la famille (a, b) est libre et que la famille (c, d) est libre, donc $\mathcal{F} = (a, b)$ est une base de F et $\mathcal{G} = (c, d)$ est une base de G.
Montrons que la famille $\mathcal{F} \cup \mathcal{G} = (a, b, c, d)$ est une base de E.
Comme : $\mathrm{Card}\,(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = 4 = \dim(E)$,
il suffit de montrer que la famille $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est libre.
On a, pour tout $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$:

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0 \iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \\ \alpha + 2\beta - \gamma + 2\delta = 0 \\ \alpha + 3\beta + \gamma - 3\delta = 0 \\ \alpha + 4\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = -4\gamma \\ \beta - 3\gamma + \delta = 0 \\ 2\beta - 5\gamma + 2\delta = 0 \\ 3\beta - 3\gamma - 3\delta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -4\gamma \\ \beta = \gamma + \delta \\ -2\gamma + 2\delta = 0 \\ -3\gamma + 4\delta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = 0 \\ \delta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0. \end{cases}$$

Ceci montre que la famille $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est libre, et on déduit que c'est une base de E.

Remarque : on aurait aussi pu faire intervenir un calcul de déterminant.

Finalement, les sev F et G de E sont supplémentaires dans E.

Exemple

Soient E un K-ev de dimension 5, F, G des sev de E tels que :

$F \cap G = \{0\}$, $\dim(F) = 2$, $\dim(G) = 3$.

Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

On a, d'après la formule de Grassmann :

$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2+3-0 = 5 = \dim(E)$,

d'où : $F + G = E$.

Comme : $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$,

on conclut que F et G sont supplémentaires dans E.

Méthode

Pour montrer que plusieurs sev $E_1, ..., E_N$ d'un ev E sont en somme directe

Essayer de montrer :

- pour tout $(x_1, ..., x_N) \in E_1 \times ... \times E_N$:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 0 \implies \big(\forall i \in \{1, ..., N\}, \quad x_i = 0\big)$$

- $\dim\left(\sum_{i=1}^{N} E_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \dim(E_i)$

  si $E_1, ..., E_N$ sont tous de dimensions finies.

Exemple

On note E le $\mathbb{R}$-ev des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, F_1, F_2, F_3 les parties de E constituées des applications qui s'annulent respectivement sur $]-\infty\,;1]$, $]-\infty\,;-1] \cup [1\,;+\infty[$, $[-1\,;+\infty[$.
Montrer que F_1, F_2, F_3 sont des sev de E et que leur somme est directe.

$\star$ Montrons, plus généralement, que, pour toute partie A de $\mathbb{R}$, l'ensemble $F = \big\{f \in E\,;\ \forall x \in A, \quad f(x) = 0\big\}$ est un sev de E.

On a : $F \subset E$ et $0 \in F$.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g \in F$.

On a : $\forall x \in A, \quad (\alpha f + g)(x) = \alpha \underbrace{f(x)}_{=0} + \underbrace{g(x)}_{=0} = 0$, donc : $\alpha f + g \in F$.

Ceci montre que F est un sev de E.

En particulier, F_1, F_2, F_3 sont des sev de E.

$\star$ Soient $f_1 \in F_1$, $f_2 \in F_2$, $f_3 \in F_3$ telles que : $f_1 + f_2 + f_3 = 0$.

Soit $x \in]-\infty\,;-1]$.

Par définition de F_1 et F_2, on a : $f_1(x) = 0$ et $f_2(x) = 0$.

Il s'ensuit : $f_3(x) = -\big(f_1(x) + f_2(x)\big) = 0$.

Ainsi : $\forall x \in]-\infty\,;-1], \quad f_3(x) = 0$.

Mais, par définition de F_3 : $\forall x \in [-1\,;+\infty[, \quad f_3(x) = 0$.

On déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_3(x) = 0$, c'est-à-dire $f_3 = 0$.

On obtient de même : $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$.

On conclut que les sev F_1, F_2, F_3 sont en somme directe.

Méthode

Pour montrer qu'une famille infinie est libre

Montrer que toute sous-famille finie est libre.

➟ **Exercices 1.2, 1.4, 1.7**

Exemple

Montrer que la famille d'applications $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ définie, pour tout $a \in \mathbb{R}$, par :

$$f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant a \\ 1 & \text{si} \quad x > a \end{cases}$$

est libre (pour les lois usuelles).

Nous allons montrer que toute sous-famille finie (de cette famille infinie) est libre.

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $a_1, ..., a_N \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts, $\lambda_1, ..., \lambda_N \in \mathbb{R}$ tels que : $$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k f_{a_k} = 0.$$

Soit $i \in \{1, ..., N\}$. Supposons $\lambda_i \neq 0$.

On déduit alors : $$f_{a_i} = -\frac{1}{\lambda_i} \sum_{k\neq i} \lambda_k f_{a_k}.$$

On remarque que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f_a est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et que f_a est discontinue en a.

Par combinaison linéaire, $-\dfrac{1}{\lambda_i}\displaystyle\sum_{k\neq i} \lambda_k f_{a_k}$ est donc continue en a_i, contradiction avec f_{a_i} discontinue en a_i.

Ceci montre : $$\forall i \in \{1, ..., N\}, \quad \lambda_i = 0,$$

donc la famille $(f_{a_i})_{1\leqslant i\leqslant N}$ est libre.

Ainsi, toute sous-famille finie de $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre, donc, par définition, la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

Méthode

Pour montrer qu'une famille infinie est liée

Montrer qu'il existe une sous-famille finie liée.

➟ **Exercices 1.2**

Exemple

Montrer que la famille d'applications $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ définie, pour tout $a \in \mathbb{R}$, par :

$$f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \cos(x+a)$$

est liée.

On remarque, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_a(x) = \cos(x+a) = \cos a \cos x - \sin a \sin x,$$

donc : $$f_a = (\cos a) \cos + (-\sin a) \sin .$$

Ainsi, les f_a se décomposent linéairement sur les deux applications cos et sin.

En particulier, les trois applications $f_0,\ f_1,\ f_2$ se décomposent linéairement sur les deux applications $\cos, \sin$, donc la famille $(f_0,\ f_1,\ f_2)$ est liée.

Ainsi, il existe une sous-famille finie de $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ qui est liée et on conclut, par définition, que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est liée.

Méthode

Pour montrer qu'une partie H de E est un hyperplan de E

Essayer de :

- montrer que H est un sev de E et que H admet au moins un supplémentaire de dimension finie égale à 1
- montrer que H est le noyau d'une forme linéaire autre que la forme nulle
- montrer que H est un sev de E et que $\dim(H) = \dim(E) - 1$, si E est de dimension finie.

Exemple

Montrer que l'ensemble H des suites réelles convergeant vers 0 est un hyperplan du $\mathbb{R}$-ev E des suites réelles convergentes.

D'abord, il est clair que E est bien un $\mathbb{R}$-ev et que H est un sev de E.
Notons D la droite vectorielle de E engendrée par la suite (1), suite constante égale à 1.

$\star$ On a $H \cap D = \{0\}$, car, si une suite est constante et converge vers 0, alors elle est constante égale à 0.

$\star$ Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. Notons ℓ la limite de u, et $v = u - (\ell)$.
On a alors : $\quad u = v + (\ell), \quad v \in H, \quad (\ell) \in D.$
Ceci montre : $H + D = E$.

Ainsi, la droite vectorielle D est un supplémentaire de H dans E, donc H est un hyperplan de E.

Exemple

Montrer que l'ensemble

$$H = \left\{ f \in E \,;\ \int_0^{1/2} f = 0 \right\}$$

est un hyperplan du $\mathbb{R}$-ev

$$E = C([0\,;1], \mathbb{R}).$$

Il est clair que l'application $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto \int_0^{1/2} f$

est une forme linéaire sur E, autre que la forme nulle puisque :

$$\varphi(1) = \int_0^{1/2} 1 = \frac{1}{2} \neq 0.$$

D'après le cours, on conclut que $H = \operatorname{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E.

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $H = \mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$ est un hyperplan de $E = \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$.

Il est clair que E est un $\mathbb{C}$-ev, que H est un sev de E et que :

$$\dim(E) = n + 1, \quad \dim(H) = n.$$

On a donc : $\quad \dim(H) = \dim(E) - 1$

et on conclut que H est un hyperplan de E.

Méthode

Pour obtenir une factorisation d'une matrice en deux matrices de formats ou de rangs imposés

Essayer d'utiliser le théorème du cours caractérisant les matrices A de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ telles que $\mathrm{rg}\,(A) = r$:
il existe $P \in \mathbf{GL}_n(K)$, $Q \in \mathbf{GL}_p(K)$ telles que $A = P\mathrm{J}_{n,p,r}Q$, où on a noté $\mathrm{J}_{n,p,r} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$.

➟ **Exercices 1.3, 1.13, 1.23**

Exemple

Soient $n, p, q, r \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_{p,q}(K)$, $B \in \mathbf{M}_{n,r}(K)$.
Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{rg}\,(B) \leqslant \mathrm{rg}\,(A)$

(ii) $\exists\,(P,Q) \in \mathbf{M}_{n,p}(K) \times \mathbf{M}_{q,r}(K),$
$$B = PAQ.$$

<u>(i) $\Longrightarrow$ (ii) :</u>

Supposons $\mathrm{rg}\,(B) \leqslant \mathrm{rg}\,(A)$. Notons $a = \mathrm{rg}\,(A)$, $b = \mathrm{rg}\,(B)$.

D'après le cours, il existe $R \in \mathbf{GL}_p(K)$, $S \in \mathbf{GL}_q(K)$ telles que $A = R\,\mathrm{J}_{p,q,a}S$ et il existe $T \in \mathbf{GL}_n(K)$, $U \in \mathbf{GL}_r(K)$ telles que $B = T\mathrm{J}_{n,r,b}U$.

Comme $b \leqslant a$, on a :
$$J_{n,r,b} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{J}_{n,p,b}\mathrm{J}_{p,q,a}\mathrm{J}_{q,r,b}.$$

D'où :
$$\begin{aligned} B = T\mathrm{J}_{n,r,b}U &= T\mathrm{J}_{n,p,b}\mathrm{J}_{p,q,a}\mathrm{J}_{q,r,b}U \\ &= (T\mathrm{J}_{n,p,b}R^{-1})(R\mathrm{J}_{p,q,a}S)(S^{-1}\mathrm{J}_{q,r,b}U). \end{aligned}$$

En notant
$$P = T\mathrm{J}_{n,p,b}R^{-1} \in \mathbf{M}_{n,p}(K) \quad \text{et} \quad Q = S^{-1}\mathrm{J}_{q,r,b}U \in \mathbf{M}_{q,r}(K),$$
on obtient bien : $B = PAQ$.

<u>(ii) $\Longrightarrow$ (i) :</u>

S'il existe $(P,Q) \in \mathbf{M}_{n,p}(K) \times \mathbf{M}_{q,r}(K)$ tel que $B = PAQ$, alors :
$$\mathrm{rg}\,(B) = \mathrm{rg}\,\big((PA)Q\big) \leqslant \mathrm{rg}\,(PA) \leqslant \mathrm{rg}\,(A).$$

Méthode

Pour manipuler des matrices décomposées en blocs

Essayer d'amener des combinaisons linéaires, des produits de matrices décomposées en blocs.

➟ **Exercices 1.6, 1.14, 1.16, 1.18 à 1.22, 1.24**

Exemple

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B, C, D \in \mathbf{M}_n(K)$, $(\alpha, \beta) \in K^2$ tel que $\alpha \neq \beta$.

On note :

$$J = \begin{pmatrix} \alpha\,\mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & \beta\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Montrer que M commute avec J si et seulement si : $B = 0$ et $C = 0$.

On a :

$$JM = MJ \iff \begin{pmatrix} \alpha\,\mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & \beta\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha\,\mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & \beta\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \alpha A & \alpha B \\ \beta C & \beta D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta B \\ \alpha C & \beta D \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha B = \beta B \\ \beta C = \alpha C \end{cases} \iff \begin{cases} (\alpha - \beta) B = 0 \\ (\alpha - \beta) C = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} B = 0 \\ C = 0. \end{cases}$$

Exemple

Soient E un K-ev de dimension finie et F un sev de E. On note $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$.

a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{L}_F(E)$ des endomorphismes de E laissant F stable est un sev de $\mathcal{L}(E)$ et déterminer sa dimension.

Se peut-il que $\mathcal{L}_F(E)$ soit un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$?

b) Soit G un supplémentaire de F dans E.

Montrer que l'ensemble $\mathcal{L}_{F,G}(E)$ des endomorphismes de E laissant F et G stables est un sev de $\mathcal{L}(E)$ et déterminer sa dimension.

Se peut-il que $\mathcal{L}_{F,G}(E)$ soit un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$?

a) 1) ⋆ Il est clair que : $\mathcal{L}_F(E) \subset \mathcal{L}(E)$ et $0 \in \mathcal{L}_F(E)$.

⋆ Soient $\alpha \in E$, $f, g \in \mathcal{L}_F(E)$.

On a : $\quad \forall x \in F, \quad (\alpha f + g)(x) = \alpha \underbrace{f(x)}_{\in F} + \underbrace{g(x)}_{\in F} \in F,$

donc F est stable par $\alpha f + g$, d'où : $\alpha f + g \in \mathcal{L}_F(E)$.

On conclut : $\mathcal{L}_F(E)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$.

2) L'ev E admet au moins une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ adaptée à F, c'est-à-dire telle que $(e_1, ..., e_p)$ est une base de F.

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Il est clair que F est stable par f si et seulement si M est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

où $A \in \mathbf{M}_p(K)$, $B \in \mathbf{M}_{p,n-p}(K)$, $C \in \mathbf{M}_{n-p}(K)$.

L'application de $\mathbf{M}_p(K) \times \mathbf{M}_{p,n-p}(K) \times \mathbf{M}_{n-p}(K)$ dans $\mathcal{L}_F(E)$ qui, à (A, B, C) associe l'endomorphisme f de E tel que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

est un isomorphisme d'ev, donc :

$$\begin{aligned} \dim\big(\mathcal{L}_F(E)\big) &= \dim\big(\mathbf{M}_p(K) \times \mathbf{M}_{p,n-p}(K) \times \mathbf{M}_{n-p}(K)\big) \\ &= \dim\big(\mathbf{M}_p(K)\big) + \dim\big(\mathbf{M}_{p,n-p}(K)\big) + \dim\big(\mathbf{M}_{n-p}(K)\big) \\ &= p^2 + p(n-p) + (n-p)^2 = n^2 - np + p^2. \end{aligned}$$

3) Le sev $\mathcal{L}_F(E)$ est un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$ si et seulement si :

$$\dim\big(\mathcal{L}_F(E)\big) = \dim\big(\mathcal{L}(E)\big) - 1. \qquad (*)$$

On a : $\quad (*) \iff n^2 - np + p^2 = n^2 - 1 \iff np - p^2 = 1$

$$\iff \underbrace{p}_{\in \mathbb{N}}\underbrace{(n-p)}_{\in \mathbb{N}} = 1 \iff \begin{cases} p = 1 \\ n - p = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} n = 2 \\ p = 1. \end{cases}$$

On conclut qu'il se peut que $\mathcal{L}_F(E)$ soit un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$, et ceci se produit si et seulement si : $n = 2$ et $p = 1$.

b) 1) Le même raisonnement qu'en *a)1)* montre que $\mathcal{L}_{F,G}(E)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$.

On peut aussi remarquer que $\mathcal{L}_{F,G}(E) = \mathcal{L}_F(E) \cap \mathcal{L}_G(E)$, donc $\mathcal{L}_{F,G}(E)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$ comme intersection de deux sev.

2) L'ev E admet au moins une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$, c'est-à-dire que $(e_1, ..., e_p)$ est une base de F et $(e_{p+1}, ..., e_q)$ est une base de G.

Soient $f \in \mathcal{L}(E),\ M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Il est clair que F et G sont stables par f si et seulement si M est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

où $A \in \mathbf{M}_p(K)$, $C \in \mathbf{M}_{n-p}(K)$.

L'application de $\mathbf{M}_p(K) \times \mathbf{M}_{n-p}(K)$ dans $\mathcal{L}_{F,G}(E)$ qui, à (A, C) associe l'endomorphisme f de E tel que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

est un isomorphisme d'ev, donc :

$$\begin{aligned} \dim\big(\mathcal{L}_{F,G}(E)\big) &= \dim\big(\mathbf{M}_p(K) \times \mathbf{M}_{n-p}(K)\big) \\ &= \dim\big(\mathbf{M}_p(K)\big) + \dim\big(\mathbf{M}_{n-p}(K)\big) = p^2 + (n-p)^2 \\ &= n^2 - 2np + 2p^2. \end{aligned}$$

3) On a : $\quad \dim\big(\mathcal{L}_{F,G}(E)\big) = \dim\big(\mathcal{L}(E)\big) - 1$

$$\iff n^2 - 2np + 2p^2 = n^2 - 1 \iff 2(np - p^2) = 1,$$

ce qui est impossible car le premier membre est pair et le second est impair.

On conclut que $\mathcal{L}_{F,G}(E)$ n'est jamais un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$.

Vrai ou Faux ?

E, F désignent des K-espaces vectoriels, $n \in \mathbb{N}^*$, $E_1, ..., E_n$ des sous–espaces vectoriels de E.

1.1 Les sous-espaces vectoriels $E_1, ..., E_n$ de E sont en somme directe si et seulement si : V F

$$\forall x_1 \in E_1, ..., \forall x_n \in E_n, \quad \big(x_1 + \cdots + x_n = 0 \implies x_1 = ... = x_n = 0\big).$$

1.2 Les sous-espaces vectoriels $E_1, ..., E_n$ de E sont en somme directe si et seulement si : V F

$$\forall (i,j) \in \{1, ..., n\}^2, \quad \big(i \neq j \implies E_i \cap E_j = \{0\}\big).$$

1.3 On a, pour tous sous-espaces vectoriels E_1, E_2, E_3 de E : V F

$$E_1 \cap (E_2 + E_3) = (E_1 \cap E_2) + (E_1 \cap E_3).$$

1.4 On a, pour tous sous-espaces vectoriels E_1, E_2, E_3 de E : V F

$$E_1 + (E_2 \cap E_3) = (E_1 + E_2) \cap (E_1 + E_3).$$

1.5 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, les parties E_1 et E_2 formées respectivement par les fonctions paires (resp. impaires) sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E. V F

1.6 Pour tout espace vectoriel E et tout endomorphisme f de E, les sev $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ de E sont supplémentaires dans E. V F

1.7 Si, pour des endomorphismes f, g de E, $\mathrm{Ker}\,(f)$ est stable par g, alors f et g commutent. V F

1.8 Si deux endomorphismes f, g de E commutent, alors le noyau et l'image de chacun des deux est stable par chacun des deux. V F

1.9 On a : $\forall A, B \in \mathbf{M}_n(K), \quad \mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA).$ V F

1.10 On a : $\forall A, B \in \mathbf{M}_n(K), \quad \mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(A)\,\mathrm{tr}\,(B).$ V F

Énoncés des exercices

1.1 Inclusions entre intersection de sev, entre somme de sev

Soient E un K-espace vectoriel, F, G, H des sev de E tels que :

$$F \cap H \subset F \cap G, \quad F + H \subset F + G, \quad G \subset H.$$

Montrer : $G = H$.

1.2 Famille infinie libre, famille infinie liée

Étudier la liberté des familles d'applications suivantes, pour les lois usuelles :

a) $\left(f_a : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \dfrac{1}{x+a}\right)_{a \in]0\,;+\infty[}$

b) $\big(f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \operatorname{ch}(x-a)\big)_{a \in \mathbb{R}}$.

1.3 Étude de l'existence d'une factorisation d'une matrice

Existe-t-il $A \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbf{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = C$, où C désigne successivement les matrices : $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

1.4 Famille des évaluations sur un ensemble fini

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X = \{x_1, ..., x_n\}$ un ensemble fini à n éléments. On note $F = K^X$ et, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on note $\mathrm{E}_i : F \longrightarrow K, \quad f \longmapsto f(x_i)$, appelée *évaluation* en x_i.
Montrer que la famille $(\mathrm{E}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{L}(F, K)$.

1.5 Utilisation de la trace

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Existe-t-il $(A, B) \in \big(\mathbf{M}_n(\mathbb{C})\big)^2$ tel que : $AB - BA = \mathrm{I}_n$?

1.6 Étude d'inverse pour une matrice triangulaire par blocs

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $B \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $C \in \mathbf{M}_p(K)$.

a) Montrer que M est inversible si et seulement si A et C sont inversibles.

b) Lorsque A et C sont inversibles, exprimer M^{-1} sous forme de blocs.

1.7 Exemple de famille infinie libre

Montrer que la famille $\big(f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto |x-a|^{3/2}\big)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

1.8 Base de polynômes avec conditions sur les degrés

Soit E un sev de dimension finie de $K[\mathrm{X}]$.

a) Montrer que E admet au moins une base formée de polynômes de degrés deux à deux distincts.

b) Montrer que E admet au moins une base formée de polynômes de degrés tous égaux.

1.9 Pour un projecteur en dimension finie, la trace est égale au rang

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, p un projecteur de E.
Montrer : $\mathrm{tr}\,(p) = \mathrm{rg}\,(p)$.

1.10 Exemple d'utilisation de la trace et du rang d'un projecteur

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $p_1, ..., p_N$ des projecteurs de E tels que :
$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 0.$$
Montrer : $\forall i \in \{1, ..., N\}, \quad p_i = 0$.

1.11 Formes linéaires et trace

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour toute $A \in \mathbf{M}_n(K)$, l'application :
$$\mathbf{M}_n(K) \longrightarrow K, \quad X \longmapsto \mathrm{tr}\,(AX)$$
est un élément de $\mathcal{L}\big(\mathbf{M}_n(K), K\big)$, puis montrer que l'application θ : $\mathbf{M}_n(K) \longrightarrow \mathcal{L}\big(\mathbf{M}_n(K), K\big)$ définie par :
$$\forall A \in \mathbf{M}_n(K),\ \forall X \in \mathbf{M}_n(K), \quad \big(\theta(A)\big)(X) = \mathrm{tr}\,(AX)$$
est un isomorphisme de K-ev.

1.12 Projecteurs et coefficients irrationnels

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B, C \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $A^2 = A, \quad B^2 = B, \quad C^2 = C$.
On note $M = A + \sqrt{2}\,B + \sqrt{3}\,C$ et on suppose $M^2 = M$. Montrer : $B = C = 0$.

1.13 Factorisation d'une matrice

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $r = \mathrm{rg}\,(A)$.
Montrer : $\exists U \in \mathbf{M}_{n,r}(K),\ \exists V \in \mathbf{M}_{r,p}(K), \quad A = UV$.

1.14 Rang d'une matrice décomposée en blocs

a) 1) Montrer que, si une matrice M est décomposée en blocs de colonnes, $M = (U\,|\,V)$, alors :
$$\mathrm{rg}\,(M) \leqslant \mathrm{rg}\,(U) + \mathrm{rg}\,(V).$$
2) Montrer que, si une matrice M est décomposée en blocs de lignes, $M = \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}$, alors :
$$\mathrm{rg}\,(M) \leqslant \mathrm{rg}\,(R) + \mathrm{rg}\,(S).$$
3) En déduire que, si une matrice M est décomposée en quatre blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, (où A et D ne sont pas nécessairement carrées), alors :
$$\mathrm{rg}\,(M) \leqslant \mathrm{rg}\,(A) + \mathrm{rg}\,(B) + \mathrm{rg}\,(C) + \mathrm{rg}\,(D).$$
b) Soient $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \leqslant n$ et $p \leqslant n$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K)$, où $A \in \mathbf{M}_{m,p}(K)$, $B \in \mathbf{M}_{m,n-p}(K)$, $C \in \mathbf{M}_{n-m,p}(K)$.

Déduire de *a)* que, si M est inversible, alors : $\mathrm{rg}\,(A) \geqslant m + p - n$.

1.15 Normes subordonnées à $||.||_1$ et à $||.||_\infty$

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On note : $\quad ||A||_\ell = \underset{1 \leqslant j \leqslant p}{\text{Max}} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right), \qquad ||A||_c = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\text{Max}} \left(\sum_{j=1}^{p} |a_{ij}| \right),$

et, pour tout $X = (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant p} \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K})$: $\; ||X||_1 = \sum_{j=1}^{p} |x_j|, \quad ||X||_\infty = \underset{1 \leqslant j \leqslant p}{\text{Max}} |x_j|.$

Montrer : $\quad ||A||_\ell = \underset{X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}}{\text{Sup}} \dfrac{||AX||_1}{||X||_1}, \qquad ||A||_c = \underset{X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}}{\text{Sup}} \dfrac{||AX||_\infty}{||X||_\infty}.$

1.16 Endomorphismes d'image et de noyau imposés

Soient E un K-ev, F, G deux sev de E supplémentaires dans E.

On note : $\quad \mathcal{G} = \big\{ f \in \mathcal{L}(E) \, ; \; \mathrm{Im}\,(f) = F \; \text{ et } \; \mathrm{Ker}\,(f) = G \big\}.$

a) Établir que $\mathcal{G}$ est un groupe pour la loi $\circ$.

b) On suppose ici que E est de dimension finie. On note $n = \dim(E)$, $p = \dim(F)$, $\mathcal{B}_1 = (e_1, ..., e_p)$ une base de F, $\mathcal{B}_2 = (e_{p+1}, ..., e_n)$ une base de G, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$, qui est une base de E.

Montrer que l'application $\theta : f \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme de groupes de $(\mathcal{G}, \circ)$ sur $(H, \cdot)$, où $H = \left\{ \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K) \, ; \; M \in \mathbf{GL}_p(K) \right\}.$

1.17 Hyperplans de $\mathbf{M}_n(K)$ rencontrant $\mathbf{GL}_n(K)$

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que tout hyperplan de $\mathbf{M}_n(K)$ rencontre $\mathbf{GL}_n(K)$.

1.18 Rang d'une matrice triangulaire par blocs, un bloc diagonal étant égal à l'identité

a) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $B \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $C \in \mathbf{M}_p(K)$. Montrer: $\quad \mathrm{rg} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = n + \mathrm{rg}\,(C).$

b) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $R \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $S \in \mathbf{M}_{p,n}(K)$. Montrer :

$$p + \mathrm{rg}\,(\mathrm{I}_n + RS) = n + \mathrm{rg}\,(\mathrm{I}_p + SR).$$

1.19 Rang d'une matrice diagonale par blocs

a) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $B \in \mathbf{M}_p(K)$. Montrer : $\mathrm{rg} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\,(A) + \mathrm{rg}\,(B).$

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que, si $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont équivalentes, alors A et B sont équivalentes.

c) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{M}_n(K)$, $U, V \in \mathbf{M}_p(K)$. Montrer que, si A et B sont équivalentes et si $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$ sont équivalentes, alors U et V sont équivalentes.

1.20 Déformation d'un endomorphisme, pour une image et un noyau imposés

Soient E un K-ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$, F un sev de E tel que $\dim(F) \leqslant \operatorname{rg}(f)$, G un supplémentaire de F dans E.

Montrer qu'il existe $(u, v) \in \big(\mathcal{L}(E)\big)^2$ tel que :

$$\operatorname{Im}(u \circ f \circ v) = F \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker}(u \circ f \circ v) = G.$$

1.21 Caractérisation de matrices inversibles par blocs

Soient $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, où $A \in \mathbf{GL}_n(K)$, $B \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $C \in \mathbf{M}_{p,n}(K)$, $D \in \mathbf{M}_p(K)$.

Montrer que M est inversible si et seulement si $D - CA^{-1}B$ est inversible, et calculer alors M^{-1} sous forme de matrice décomposée en blocs.

1.22 Étude des matrices X telles que $AXB = 0$

Soient $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_{m,n}(K)$, $B \in \mathbf{M}_{p,q}(K)$.

On note : $E = \big\{X \in \mathbf{M}_{n,p}(K)\,;\, AXB = 0\big\}$.

Montrer que E est un K-ev et déterminer sa dimension.

1.23 Factorisation d'une matrice carrée non inversible

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$ non inversible.

Montrer qu'il existe $B, C \in \mathbf{M}_n(K)$ telles que :

$$A = BC, \quad B \text{ est inversible}, \quad C \text{ est nilpotente}.$$

1.24 Étude de rang pour une matrice par blocs

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

où $A \in \mathbf{GL}_n(K)$, $B \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $C \in \mathbf{M}_{p,n}(K)$, $D \in \mathbf{M}_p(K)$.

Montrer : $\operatorname{rg}(M) = n \iff D = CA^{-1}B$.

À cet effet, on pourra utiliser le résultat de l'exercice 1.21.

1.25 Réunion de plusieurs sev

Soient K un corps commutatif infini, E un K-ev, $p \in \mathbb{N}^*$, $F_1, ..., F_p$ des sev de E tels que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} F_i = E$. Démontrer qu'il existe $i \in \{1, ..., p\}$ tel que $F_i = E$.

1.26 Projecteur associé à un sous-groupe fini de $\mathcal{GL}(E)$

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $e = \mathrm{Id}_E$, G un sous-groupe fini de $\mathcal{GL}(E)$, $n = \operatorname{Card}(G)$. On note : $p = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{g \in G} g$.

a) Montrer : $\forall h \in G, \quad p \circ h = p$.

b) En déduire que p est un projecteur de E.

c) Établir : $\displaystyle\bigcap_{g \in G} \operatorname{Ker}(g - e) = \operatorname{Im}(p)$.

d) Déduire : $\dim\Big(\displaystyle\bigcap_{g \in G} \operatorname{Ker}(g - e)\Big) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{g \in G} \operatorname{tr}(g)$.

Du mal à démarrer ?

1.1 Il s'agit de montrer l'inclusion $H \subset G$.
Passer par les éléments.

1.2 Se rappeler que, dans un ev, une famille infinie est dite libre si et seulement si toute sous-famille finie est libre, et qu'une famille infinie est liée si et seulement si elle n'est pas libre, c'est-à-dire si et seulement s'il existe une sous-famille finie liée.

a) Pour montrer que $(f_a)_{a \in [0\,;+\infty[}$ est libre, utiliser l'unicité d'une décomposition en éléments simples.

b) Pour montrer que $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est liée, établir, par exemple, que $(f_{-1},\ f_0,\ f_1)$ est liée.

1.3 Dans les deux premiers exemples, il existe des matrices A, B très simples convenant. Pour le troisième exemple, si (A, B) convient, raisonner sur les rangs et obtenir une contradiction.

1.4 *1)* Vérifier, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$: $\mathrm{E}_i \in \mathcal{L}(F, K)$.

2) Montrer que $(\mathrm{E}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre, en exploitant, pour $j \in \{1, ..., n\}$ fixé, l'application $f_j : x_i \longmapsto \delta_{ij}$.

3) Conclure.

1.5 Prendre la trace.

1.6 *a)* Passer par les déterminants.

b) Noter $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ et résoudre un système de quatre équations matricielles.

1.7 Se rappeler que dans un ev, une famille infinie est dite libre si et seulement si toute sous-famille finie est libre.

Remarquer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f_a est de classe C^2 sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, mais n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

1.8 *a)* Récurrence sur $n = \dim(E)$.

Partant d'une base $(P_1, ..., P_{n+1})$ telle que $\deg(P_1) \leqslant ... \leqslant \deg(P_{n+1})$, construire une base $(Q_1, ..., Q_{n+1})$ telle que $Q_{n+1} = P_{n+1}$ et que :
$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \deg(Q_i) < \deg(P_{n+1}),$$
puis utiliser l'hypothèse de récurrence.

b) Partant d'une base $(P_1, ..., P_n)$ telle que $\deg(P_1) < ... < \deg(P_n)$, construire une base $(S_1, ..., S_n)$ telle que $S_n = P_n$ et que :
$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \deg(S_i) = \deg(P_n).$$

1.9 Utiliser la matrice de p dans une base de E formée d'une base de $\mathrm{Im}\,(p)$ suivie d'une base de $\mathrm{Ker}\,(p)$.

1.10 Utiliser l'exercice 1.9.

1.11 *1)* Montrer que, pour toute $A \in \mathbf{M}_n(K)$, l'application $\varphi_A : \mathbf{M}_n(K) \longrightarrow K,\quad X \longmapsto \mathrm{tr}\,(AX)$ est élément de $\mathbf{M}_n(K)^*$.

2) Montrer que θ est linéaire, injective (en utilisant les matrices élémentaires), puis conclure.

1.12 Se rappeler le théorème du cours sur rang et trace d'un projecteur en dimension finie, et montrer que, si $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Z}^3$ est tel que $\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} = 0$, alors $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

1.13 Utiliser le théorème du cours faisant intervenir la matrice $\mathrm{J}_{n,p,r}$.

1.14 *a) 1)* Se rappeler que le rang d'une matrice est égal à la dimension du sev engendré par les colonnes de cette matrice.

2) Appliquer *1)* en transposant.

3) Combiner *1)* et *2)*.

b) Utiliser *a)* et $\mathrm{rg}\,(M) = n$.

1.15 *1)* $\star$ Montrer :
$$\forall X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \quad ||AX||_1 \leqslant ||A||_\ell \, ||X||_1.$$
$\star$ Considérer la matrice-colonne élémentaire E_j, où j est tel que $||A||_\ell = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

2) $\star$ Montrer :
$$\forall X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \quad ||AX||_\infty \leqslant ||A||_c \, ||X||_\infty.$$
$\star$ Considérer la matrice-colonne $X = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{pmatrix}$, où :
$$\varepsilon_j = \begin{cases} \dfrac{|a_{i_0 j}|}{a_{i_0 j}} & \text{si} \quad a_{i_0 j} \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad a_{i_0 j} = 0, \end{cases}$$
i_0 étant tel que $||A||_c = \sum_{j=1}^{p} |a_{i_0 j}|$.

1.16 *a)* Attention : $\mathcal{G}$ va être un groupe pour la loi $\circ$, mais $\mathcal{G}$ n'est pas nécessairement un sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$.

Montrer successivement le caractère interne de la loi, l'existence d'un neutre, qui est le projecteur sur F parallèlement à G, l'associativité, l'existence, pour chaque élément, d'un symétrique, en utilisant le théorème d'isomorphisme.

b) $\star$ Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{G}$, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $M \in \mathbf{GL}_p(K)$.

⋆ Réciproquement, montrer que, pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de H, où $M \in \mathbf{GL}_p(K)$, l'endomorphisme f de E, représenté par A dans $\mathcal{B}$, est élément de $\mathcal{G}$.

Construire ainsi deux applications θ et φ, réciproques l'une de l'autre, et montrer que θ est un morphisme du groupe $(\mathcal{G}, \circ)$ sur $(H, \cdot)$. Conclure.

1.17 Soit H un hyperplan de $\mathbf{M}_n(K)$. Raisonner par l'absurde : supposer $H \cap \mathbf{GL}_n(K) = \varnothing$.

Montrer que H contient alors toutes les matrices nilpotentes, en raisonnant par l'absurde.

Construire deux matrices nilpotentes dont la somme est inversible.

Conclure.

1.18 *a)* Remarquer, par exemple :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -B \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

b) Faire apparaître $\mathrm{I}_n + RS$ et $\mathrm{I}_p + SR$ dans des produits par blocs de matrices carrées d'ordre $n + p$, et utiliser le résultat de *a)*.

1.19 *a)* Utiliser le théorème du cours faisant intervenir les matrices $\mathrm{J}_{\ldots}$.

b) Utiliser le résultat de *a)*.

c) Utiliser le résultat de *a)*.

1.20 Il suffit de trouver un couple $(u, v) \in \big(\mathcal{L}(E)\big)^2$ tel que $u \circ f \circ v = p$, où p est le projecteur sur F parallèlement à G. Utiliser le théorème du cours sur les matrices $\mathrm{J}_{\ldots}$.

1.21 *1^re^ méthode : Recherche de l'inverse par résolution d'un système :*

En notant $N = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$, résoudre $MN = \mathrm{I}_{n+p}$.

2^e^ méthode : Utilisation d'une factorisation par blocs :

Remarquer :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ -CA^{-1} & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

1.22 *1)* Montrer que E est un K-ev.

2) Utiliser le théorème du cours faisant intervenir les matrices $\mathrm{J}_{m,n,a}$ et $\mathrm{J}_{p,q,b}$, où $a = \mathrm{rg}\,(A)$, $b = \mathrm{rg}\,(B)$ (et, pour la commodité, $a \leqslant b$). Utiliser des décompositions en neuf blocs.

1.23 Noter $r = \mathrm{rg}\,(A) < n$ et considérer une matrice nilpotente simple $M_r \in \mathbf{M}_{r+1}(K)$ de rang r, et $N_r = \begin{pmatrix} M_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K)$.

1.24 Remarquer :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ CA^{-1} & -\mathrm{I}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & CA^{-1}B - D \end{pmatrix}.$$

1.25 Récurrence sur p.

Si $F_1, \ldots, F_{p+1}$ sont des sev de E tels que :

$$\bigcup_{i=1}^{p+1} F_i = E, \quad F_{p+1} \neq E, \quad \bigcup_{i=1}^{p} F_i \neq E,$$

considérer $x, y \in E$ tels que $x \notin F_{p+1}$ et $y \notin \bigcup_{i=1}^{p} F_i$, et envisager la droite affine passant par y et dirigée par x.

1.26 *a)* Remarquer que, pour tout $h \in G$, l'application $g \longmapsto g \circ h$ est une permutation de G, donc :

$$\sum_{g \in G} g \circ h = \sum_{g \in G} g.$$

b) Calculer p^2 en utilisant *a)*, pour l'un des deux facteurs.

c) *1)* Montrer que, pour tout $x \in \bigcap_{g \in G} \mathrm{Ker}\,(g - e)$, on a : $p(x) = x$.

2) Réciproquement, montrer que, pour tout $x \in \mathrm{Im}\,(p)$, on a $g(x) = (g \circ p)(x)$, et que, comme en *a)*, $g \circ p = p$.

d) Se rappeler le théorème sur rang et trace pour un projecteur en dimension finie.

Vrai ou Faux, les réponses

1.1 C'est un résultat du cours. **V**

1.2 C'est vrai pour $n = 2$, mais faux si $n \geqslant 3$. **F**
Contre-exemple : dans le plan, trois droites vectorielles deux à deux distinctes.

1.3 On a seulement l'inclusion : $(E_1 \cap E_2) + (E_1 \cap E_3) \subset E_1 \cap (E_2 + E_3)$. **F**
Contre-exemple : dans le plan, trois droites vectorielles deux à deux distinctes.

1.4 On a seulement l'inclusion : $E_1 + (E_2 \cap E_3) \subset (E_1 + E_2) \cap (E_1 + E_3)$. **F**
Contre-exemple : dans le plan, trois droites vectorielles deux à deux distinctes.

1.5 Il est immédiat que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de E et que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, où 0 est la fonction constante nulle, et tout élément f de E se décompose en $f = g_1 + g_2$, où : $g_1 : x \longmapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$, $g_2 : x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$, et $(g_1, g_2) \in E_1 \times E_2$. **V**

1.6 Contre-exemple : $E = \mathbb{R}^2$, f de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1,\, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$. **F**
On a ici $\operatorname{Ker}(f) = \mathbb{R}\, e_1$ et $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}\, e_1$, donc $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}\, e_1 \neq \{0\}$.

1.7 Contre-exemple : $E = \mathbb{R}^2$, f, g représentés respectivement dans la base canonique par les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **F**

1.8 C'est un résultat du cours. **V**

1.9 C'est un résultat du cours. **V**

1.10 Contre-exemple : pour $n \geqslant 2$, $A = B = \mathrm{I}_n$. **F**

Corrigés des exercices

1.1

Soit $x \in H$.
Alors, $x \in H \subset F + H \subset F + G$,
donc il existe $f \in F$, $g \in G$, tels que $x = f + g$.
On a : $g \in G \subset H, \quad x \in H$,
donc, puisque H est un sev de E : $f = x - g \in H$.
Alors, $f \in F$ et $f \in H$, donc $f \in F \cap H \subset F \cap G \subset G$,
d'où $f \in G$.
Enfin : $x = f + g, \quad f \in G, \quad g \in G$,
donc, puisque G est un sev de E, $x \in G$.
Ceci montre : $H \subset G$.

Finalement : $G = H$.

1.2

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, ..., a_n \in]0\,;+\infty[$ deux à deux distincts, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_{a_k} = 0$.

On a alors : $\quad \forall x \in [0\,;+\infty[, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{x + a_k} = 0.$

En réduisant au même dénominateur, on obtient une égalité de fonctions polynomiales sur la partie infinie $[0\,;+\infty[$ de $\mathbb{R}$, donc une égalité de polynômes, puis, en revenant aux fonctions rationnelles :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{x + a_k} = 0.$$

En faisant tendre x vers $-a_k$, on déduit :

$$\forall k \in \{1, ..., n\}, \quad \lambda_k = 0.$$

Ceci montre que la famille $(f_a)_{a \in]0\,;+\infty[}$ est libre.

b) Remarquons, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_a(x) = \operatorname{ch}(x - a) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} x,$$

donc f_a se décompose linéairement sur les deux applications ch et sh.

Il en résulte que la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$, qui a une infinité d'éléments (donc strictement plus de 2), est liée.

De façon explicite, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(f_{-1} + f_1)(x) &= \operatorname{ch}(x + 1) + \operatorname{ch}(x - 1)\\ &= 2 \operatorname{ch} 1 \operatorname{ch} x = (2 \operatorname{ch} 1) f_0(x),\end{aligned}$$

donc : $\qquad f_{-1} - 2 \operatorname{ch} 1\, f_0 + f_1 = 0,$

ce qui montre que $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est liée.

1.3

1) Il est clair que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ conviennent.

2) Il est clair que $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ conviennent.

3) S'il existe (A, B) convenant, on a alors :

$$3 = \operatorname{rg}(C) = \operatorname{rg}(AB) \leqslant \operatorname{rg}(A) \leqslant 2,$$

contradiction.

Ceci montre qu'il n'existe par (A, B) convenant.

1.4

1) D'abord, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $\mathrm{E}_i \in \mathcal{L}(F, K)$, car E_i est une application de F dans K et E_i est linéaire :

$$\begin{aligned}\forall \alpha \in K, \ \forall f, g \in F, \quad \mathrm{E}_i(\alpha f + g) &= (\alpha f + g)(x_i)\\ &= \alpha f(x_i) + g(x_i) = \alpha \mathrm{E}_i(f) + \mathrm{E}_i(g).\end{aligned}$$

2) Soit $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K^n$ tel que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{E}_i = 0$.

Soit $j \in \{1, ..., n\}$ fixé. Considérons l'application

$$f_j : X \longrightarrow K, \quad x_i \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

On a : $\qquad 0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_j(x_i) = \alpha_j.$

Ceci montre que $(\mathrm{E}_1, ..., \mathrm{E}_n)$ est libre dans $\mathcal{L}(F, K)$.

3) Puisque X est fini et a n éléments, $F = K^X$ est de dimension finie égale à n, donc $\mathcal{L}(F, K)$ est aussi de dimension finie et égale à n.

Comme, d'après *2)*, $(\mathrm{E}_1, ..., \mathrm{E}_n)$ est une famille libre de n éléments de $\mathcal{L}(F, K)$, on conclut que c'est une base de $\mathcal{L}(F, K)$.

1.5

Supposons qu'il existe $(A, B) \in \big(\mathbf{M}_n(\mathbb{C})\big)^2$ tel que :

$$AB - BA = \mathrm{I}_n.$$

On déduit, en prenant la trace : $\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(\mathrm{I}_n) = n$.

Mais, d'après les propriétés de la trace :

$$\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0,$$

d'où une contradiction.

On conclut : il n'existe pas $(A, B) \in \big(\mathbf{M}_n(\mathbb{C})\big)^2$ tel que

$$AB - BA = \mathrm{I}_n.$$

1.6

a) Puisque $\det(M) = \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \det(C)$, on a :

$$\det(M) \neq 0 \iff \big(\det(A) \neq 0 \ \text{ et } \ \det(C) \neq 0\big),$$

donc M est inversible si et seulement si A et C sont inversibles.

b) On suppose A et C inversibles, donc, d'après *a)*, M est inversible.

Décomposons M^{-1} en blocs inconnus, de même que pour M : $M^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$. Alors :

$$MM^{-1} = \mathrm{I}_{n+p} \iff \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} AX + BZ = \mathrm{I}_n \\ AY + BT = 0 \\ CZ = 0 \\ CT = \mathrm{I}_p \end{cases} \underset{C \text{ inversible}}{\iff} \begin{cases} Z = 0 \\ T = C^{-1} \\ AX = \mathrm{I}_n \\ AY = -BC^{-1} \end{cases}$$

$$\underset{A \text{ inversible}}{\iff} \begin{cases} Z = 0 \\ T = C^{-1} \\ X = A^{-1} \\ Y = -A^{-1}BC^{-1}. \end{cases}$$

On conclut : $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$.

1.7

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_{a_k} = 0$.

Soit $i \in \{1, ..., n\}$. Supposons $\lambda_i \neq 0$. On a alors :

$$f_{a_i} = -\frac{1}{\lambda_i} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n,\ k \neq i} \lambda_k f_{a_k}.$$

Remarquons que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f_a est de classe C^2 sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, mais n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Alors, d'une part f_{a_i} n'est de classe C^2 sur aucun intervalle ouvert contenant a_i, et, d'autre part, d'après l'égalité précédente, par opérations, f_{a_i} est de classe C^2 sur un intervalle ouvert assez petit, contenant a_i, contradiction.

Ceci montre : $\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \lambda_i = 0$.

On conclut : la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre.

1.8

a) Récurrence sur $n = \dim(E)$.

⋆ La propriété est évidente pour $n = 1$.

⋆ Supposons la propriété vraie pour n.

Soit E un sev de $K[\mathrm{X}]$, de dimension $n+1$. Alors, E admet au moins une base $\mathcal{B} = (P_1, ..., P_{n+1})$. En réordonnant $\mathcal{B}$, on peut se ramener au cas où :

$$\forall i \in \{1, ..., n+1\}, \quad \deg(P_i) \leqslant \deg(P_{n+1}).$$

Considérons la famille $\mathcal{C} = (Q_1, ..., Q_{n+1})$ définie par $Q_{n+1} = P_{n+1}$ et, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$:

$$Q_i = \begin{cases} P_i & \text{si} \quad \deg(P_i) < \deg(P_{n+1}) \\ P_i - \alpha_i P_{n+1} & \text{si} \quad \deg(P_i) = \deg(P_{n+1}), \end{cases}$$

où α_i est tel que $\deg(P_i - \alpha_i P_{n+1}) < \deg(P_{n+1})$.
À cet effet, il suffit de prendre pour α_i le quotient des termes de plus haut degré de P_i et P_{n+1}.

Par construction, les polynômes $Q_1, ..., Q_{n+1}$ se décomposent linéairement sur $P_1, ..., P_{n+1}$.

Réciproquement, comme $P_{n+1} = Q_{n+1}$ et que, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $P_i = Q_i$ ou $P_i = Q_i + \alpha_i Q_{n+1}$, les polynômes $P_1, ..., P_{n+1}$ se décomposent linéairement sur $Q_1, ..., Q_{n+1}$.

Il en résulte : $\quad \mathrm{Vect}(\mathcal{C}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = E$.

Comme $\dim(E) = n+1$ et que $\mathcal{C}$ engendre E et a $n+1$ éléments, on conclut que $\mathcal{C}$ est une base de E.

Considérons $F = \mathrm{Vect}(Q_1, ..., Q_n)$, qui est un sev de dimension n de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. D'après l'hypothèse de récurrence, F admet au moins une base $\mathcal{F} = (R_1, ..., R_n)$ formée de polynômes de degrés deux à deux différents.

Notons $\mathcal{G} = (R_1, ..., R_n, P_{n+1})$.

Comme $E = F \oplus P_{n+1}K[\mathrm{X}]$ et que $\mathcal{F}$ est une base de F, il est clair que $\mathcal{G}$ est une base de E.

Enfin, comme : $\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad R_i \in \mathrm{Vect}(Q_1, ..., Q_n)$

et que $(Q_1, ..., Q_n)$ sont tous de degrés $< \deg(P_{n+1})$, on a :
$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \deg(R_i) < \deg(P_{n+1}).$$

Finalement, $\mathcal{G}$ est une base de E formée de polynômes de degrés deux à deux différents.

Ceci montre le résultat voulu, par récurrence sur n.

b) Notons $n = \dim(E)$. D'après *a)*, E admet au moins une base formée de polynômes de degrés deux à deux différents. En réordonnant, E admet au moins une base $\mathcal{B} = (P_1, ..., P_n)$ telle que :

$$\deg(P_1) < ... < \deg(P_n).$$

Notons, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$: $S_i = \begin{cases} P_i + P_n & \text{si} \quad i < n \\ P_n & \text{si} \quad i = n. \end{cases}$

Il est clair qu'alors : $\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \deg(S_i) = \deg(P_n)$.

Par construction, les polynô mes $S_1, ..., S_n$ se décomposent linéairement sur $P_1, ..., P_n$.

Réciproquement, comme :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad P_i = \begin{cases} S_i - S_n & \text{si} \quad i < n \\ S_n & \text{si} \quad i = n, \end{cases}$$

$P_1, ..., P_n$ se décomposent linéairement sur $S_1, ..., S_n$.

Comme $\dim(E) = n$ et que la famille $\mathcal{C} = (S_1, ..., S_n)$ a n éléments et engendre E, on conclut que $\mathcal{C}$ est une base de E.

Finalement, E admet au moins une base formée de polynômes de degrés tous égaux.

1.9

Puisque p est un projecteur de E, on sait, d'après le cours, que : $\quad E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.
Le sev $\mathrm{Im}(p)$ admet au moins une base $\mathcal{B}_1$ et le sev $\mathrm{Ker}(p)$ admet au moins une base $\mathcal{B}_2$.
Alors, la famille $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E.

Puisque p est un projecteur, on a : $\begin{cases} \forall x \in \mathrm{Im}(p), & p(x) = x \\ \forall x \in \mathrm{Ker}(p), & p(x) = 0, \end{cases}$

donc, en notant $r = \dim \mathrm{Im}(p) = \mathrm{rg}(p)$, la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$ de E est : $\quad A = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a alors : $\quad \mathrm{tr}(p) = \mathrm{tr}(A) = r \cdot 1 + (n-r) \cdot 0 = r = \mathrm{rg}(p)$.

1.10

Pour tout $i \in \{1, ..., N\}$, comme E est de dimension finie et que p_i est un projecteur de E, on a d'après l'exercice 1.9 : $\mathrm{tr}(p_i) = \mathrm{rg}(p_i)$.

D'où : $$0 = \operatorname{tr}\Big(\sum_{i=1}^{N} p_i\Big) = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{tr}(p_i) = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\operatorname{rg}(p_i)}_{\geqslant 0}.$$

Il en résulte : $\forall i \in \{1, ..., N\}, \quad \operatorname{rg}(p_i) = 0$

et on conclut : $\forall i \in \{1, ..., N\}, \quad p_i = 0.$

1.11

1) Soit $A \in \mathbf{M}_n(K)$.

L'application $\varphi_A : \mathbf{M}_n(K) \longrightarrow K, \quad X \longmapsto \operatorname{tr}(AX)$ est linéaire car :

$\forall \alpha \in K, \ \forall X, Y \in \mathbf{M}_n(K),$

$$\begin{aligned}\varphi_A(\alpha X + Y) &= \operatorname{tr}\big(A(\alpha X + Y)\big) = \operatorname{tr}(\alpha AX + AY) \\ &= \alpha \operatorname{tr}(AX) + \operatorname{tr}(AY) = \alpha\varphi_A(X) + \varphi_A(Y).\end{aligned}$$

Ainsi : $\varphi_A \in \mathcal{L}\big(\mathbf{M}_n(K), K\big)$.

2) Considérons l'application $\theta : \mathbf{M}_n(K) \longrightarrow \mathcal{L}\big(\mathbf{M}_n(K), K\big)$ définie par :

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(K), \ \forall X \in \mathbf{M}_n(K), \quad \theta(A)(X) = \operatorname{tr}(AX).$$

Autrement dit, avec les notations de *1)* ci-dessus :

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(K), \quad \theta(A) = \varphi_A.$$

$\star$ Montrons que θ est linéaire. Soient $\alpha \in K, \ A, B \in \mathbf{M}_n(K)$.

On a, pour toute $X \in \mathbf{M}_n(K)$:

$$\begin{aligned}\theta(\alpha A + B)(X) &= \operatorname{tr}\big((\alpha A + B)X\big) \\ &= \operatorname{tr}(\alpha AX + BX) = \alpha \operatorname{tr}(AX) + \operatorname{tr}(BX) \\ &= \alpha\theta(A)(X) + \theta(B)(X) = \big(\alpha\theta(A) + \theta(B)\big)(X),\end{aligned}$$

donc : $\theta(\alpha A + B) = \alpha\theta(A) + \theta(B),$

ce qui montre la linéarité de θ.

$\star$ Montrons que θ est injective.

Soit $A \in \operatorname{Ker}(\theta)$. On a $\theta(A) = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall X \in \mathbf{M}_n(K), \quad \operatorname{tr}(AX) = 0.$$

Notons $A = (a_{ij})_{ij}$. Soit $(i, j) \in \{1, ..., n\}$.

On a, en utilisant les matrices élémentaires :

$$0 = \operatorname{tr} A\mathrm{E}_{ij}) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} & a_{1i} & \\ (0) & \vdots & (0) \\ & a_{ni} & \end{pmatrix} = a_{ji},$$

car la colonne numéro i de A a été ainsi déplacée en colonne numéro j.

On a donc : $A = 0$.

Ainsi, $\operatorname{Ker}(\theta) = \{0\}$, donc θ est injective.

$\star$ Puisque $\theta : \mathbf{M}_n(K) \longrightarrow \mathcal{L}\big(\mathbf{M}_n(K), K\big)$ est linéaire, injective, et que $\mathbf{M}_n(K)$ et $\mathcal{L}\big(\mathbf{M}_n(K), K\big)$ sont de dimensions finies égales, on conclut que θ est un isomorphisme de K-ev.

1.12

Puisque A, B, C, M sont des matrices de projecteurs, leurs traces sont égales à leurs rangs et sont des entiers naturels. D'où :

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(M) &= \operatorname{tr}(A + \sqrt{2}\,B + \sqrt{3}\,C) \\ &= \operatorname{tr}(A) + \sqrt{2}\operatorname{tr}(B) + \sqrt{3}\operatorname{tr}(C),\end{aligned}$$

donc : $$\underbrace{\big(\operatorname{tr}(A) - \operatorname{tr}(M)\big)}_{\text{noté } \alpha} + \underbrace{\operatorname{tr}(B)}_{\text{noté } \beta}\sqrt{2} + \underbrace{\operatorname{tr}(C)}_{\text{noté } \gamma}\sqrt{3} = 0.$$

On a donc $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Z}^3$ et $\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} = 0$.

Montrons : $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$.

On a en faisant passer $\gamma\sqrt{3}$ dans le second membre, puis en élevant au carré : $\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\alpha\beta\sqrt{2} = 3\gamma^2$,

d'où, si $\alpha\beta \neq 0$: $\sqrt{2} = \dfrac{3\gamma^2 - \alpha^2 - 2\beta^2}{2\alpha\beta} \in \mathbb{Q}$,

contradiction, car on sait que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Il en résulte : $\alpha\beta = 0$.

De même, on obtient : $\alpha\gamma = 0$ et $\beta\gamma = 0$. Si $\alpha \neq 0$, il en résulte $\beta = 0$ et $\gamma = 0$, puis $\alpha = 0$, contradiction.

On a donc $\alpha = 0$.

Comme $\beta\gamma = 0$, on a $\beta = 0$ ou $\gamma = 0$, puis $\beta = 0$ et $\gamma = 0$.

On conclut : $\alpha = 0, \ \beta = 0, \ \gamma = 0.$

Ici : $\operatorname{tr}(B) = 0$ et $\operatorname{tr}(C) = 0$,

donc : $\operatorname{rg}(B) = \operatorname{tr}(B) = 0$ et $\operatorname{rg}(C) = \operatorname{tr}(C) = 0$,

et on conclut : $B = 0$ et $C = 0$.

1.13

D'après le cours, puisque $r = \operatorname{rg}(A)$,
il existe $P \in \mathbf{GL}_n(K)$, $Q \in \mathbf{GL}_p(K)$ telles que :

$A = P\mathrm{J}_{n,p,r}Q$, où : $\mathrm{J}_{n,p,r} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$.

Il est clair que : $\mathrm{J}_{n,p,r} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r \\ 0_{n-r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,p-r} \end{pmatrix}$,

d'où la décomposition de A en produit :

$$A = \underbrace{P\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r \\ 0_{n-r,r} \end{pmatrix}}_{\text{notée } U} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,p-r} \end{pmatrix} Q}_{\text{notée } V},$$

et on a bien : $U \in \mathbf{M}_{n,r}(K), \ V \in \mathbf{M}_{r,p}(K)$.

1.14

a) 1) En notant $U_1, ..., U_p$ les colonnes de U, et $V_1, ..., V_q$ les colonnes de V, on a :

$$\begin{aligned}&\operatorname{Vect}(U_1, ..., U_p, V_1, ..., V_q) \\ &\qquad = \operatorname{Vect}(U_1, ..., U_p) + \operatorname{Vect}(V_1, ..., V_q),\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}&\dim \operatorname{Vect}(U_1, ..., U_p, V_1, ..., V_q) \\ &\qquad \leqslant \dim \operatorname{Vect}(U_1, ..., U_p) + \dim \operatorname{Vect}(V_1, ..., V_q),\end{aligned}$$

c'est-à-dire : $\operatorname{rg}(M) \leqslant \operatorname{rg}(U) + \operatorname{rg}(V)$.

2) On applique *1)* en transposant :

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(M) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}^{\top}\right) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} R^{\top} & S^{\top} \end{pmatrix} \\ &\leqslant \operatorname{rg}(R^{\top}) + \operatorname{rg}(S^{\top}) = \operatorname{rg}(R) + \operatorname{rg}(S).\end{aligned}$$

3) On combine les deux résultats précédents :

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(M) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \leqslant \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} \\ &\leqslant \big(\operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(C)\big) + \big(\operatorname{rg}(B) + \operatorname{rg}(D)\big).\end{aligned}$$

b) D'après *a)* et puisque M est inversible, on a :

$$n = \mathrm{rg}\,(M) \leqslant \mathrm{rg}\,(A) + \mathrm{rg}\,(B) + \mathrm{rg}\,(C).$$

Comme $B \in \mathbf{M}_{m,n-p}(K)$ et $C \in \mathbf{M}_{n-m,p}(K)$,

on a, en particulier : $\mathrm{rg}\,(B) \leqslant n-p$ et $\mathrm{rg}\,(C) \leqslant n-m$,

d'où : $\quad n \leqslant \mathrm{rg}\,(A) + (n-p) + (n-m)$,

et on conclut : $\quad \mathrm{rg}\,(A) \geqslant m+p-n.$

1.15

1) $\star$ On a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} ||AX||_1 &= \sum_{i=1}^{n} \Big| \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j \Big| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|\,|x_j| = \sum_{j=1}^{p}\Big(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\Big)|x_j| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{p} ||A||_\ell\,|x_j| = ||A||_\ell \sum_{j=1}^{p}|x_j| = ||A||_\ell\,||X||_1. \end{aligned}$$

d'où : $\quad \forall X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\},\quad \dfrac{||AX||_1}{||X||_1} \leqslant ||A||_\ell.$

$\star$ Puisque $||A||_\ell = \underset{1\leqslant j\leqslant p}{\mathrm{Max}} \Big(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\Big)$, il existe un indice $j \in \{1,\dots,p\}$ tel que : $||A||_\ell = \sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$.

Considérons la matrice-colonne $X = \mathrm{E}_j$, dont tous les éléments sont nuls, sauf celui situé à la ligne numéro j, et qui est égal à 1.

On a : $||X||_1 = 1$ et $AX = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$,

donc : $\quad ||AX||_1 = \sum_{j=1}^{p}|a_{ij}| = ||A||_\ell,$

d'où : $\quad \dfrac{||AX||_1}{||X_1||} = ||A||_\ell.$

Autrement dit, le majorant $||A||_\ell$ obtenu ci-dessus, est atteint.

On conclut : $\quad \underset{X\in\mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K})\setminus\{0\}}{\mathrm{Sup}} \dfrac{||AX||_1}{||X||_1} = ||A||_\ell.$

2) $\star$ On a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} ||AX||_\infty &= \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}} \Big|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\Big| \\ &\leqslant \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}} \sum_{j=1}^{p}|a_{ij}|\,|x_j| \leqslant \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}} \Big(\sum_{j=1}^{p}|a_{ij}|\,||X||_\infty\Big) \\ &= \Big(\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}} \sum_{j=1}^{p}|a_{ij}|\Big)||X||_\infty = ||A||_c\,||X||_\infty. \end{aligned}$$

d'où : $\quad \forall X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\},\quad \dfrac{||AX||_\infty}{||X||_\infty} \leqslant ||A||_c.$

$\star$ Puisque $||A||_c = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}} \Big(\sum_{j=1}^{p}|a_{ij}|\Big)$, il existe un indice $i_0 \in \{1,\dots,n\}$ tel que : $||A||_c = \sum_{j=1}^{p}|a_{i_0 j}|$.

Considérons la colonne $X = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ définie, pour tout $j \in \{1,\dots,p\}$, par : $\varepsilon_j = \begin{cases} \dfrac{|a_{i_0 j}|}{a_{i_0 j}} & \text{si } a_{i_0 j} \neq 0 \\ 1 & \text{si } a_{i_0 j} = 0. \end{cases}$

On a $||X||_\infty = 1$, car chaque terme de X est de module 1, et donc aussi $X \neq 0$.

On a : $||AX||_\infty = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}} \Big(\sum_{j=1}^{p}|a_{ij}\varepsilon_j|\Big) \geqslant \sum_{j=1}^{p}|a_{i_0 j}\varepsilon_j|.$

Mais, pour tout $j \in \{1,\dots,p\}$: $|a_{i_0 j}\varepsilon_j| = |a_{i_0 j}|$,
comme on le voit en séparant les cas $a_{i_0 j} \neq 0$, $a_{i_0 j} = 0$.

D'où : $\quad ||AX||_\infty \geqslant \sum_{j=1}^{p}|a_{i_0 j}| = ||A||_c.$

Ainsi, il existe $X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que : $\dfrac{||AX||_\infty}{||X||_\infty} \geqslant ||A||_c.$

Autrement dit, compte tenu de l'inégalité obtenue au point précédent, le majorant obtenu au point précédent est atteint.

On conclut : $\quad \underset{X\in\mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{K})\setminus\{0\}}{\mathrm{Sup}} \dfrac{||AX||_\infty}{||X||_\infty} = ||A||_c.$

1.16

a) 1) Caractère interne de la loi :

Montrons que la loi $\circ$ est interne dans $\mathcal{G}$.

Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{G}$.

$\star$ $*$ On a : $\mathrm{Im}\,(f_2 \circ f_1) \subset \mathrm{Im}\,(f_2) = F$.

$*$ Soit $z \in F$. On a : $z \in F = \mathrm{Im}\,(f_2)$, donc il existe $y \in E$ tel que : $z = f_2(y)$. Puisque $E = F \oplus G$, il existe $u \in F$, $v \in G$ tels que $y = u + v$. On a alors :

$$z = f_2(y) = f_2(u+v) = f_2(u) + f_2(v).$$

Mais $u \in F = \mathrm{Im}\,(f_1)$, donc il existe $x \in E$ tel que $u = f_1(x)$, et, d'autre part, $v \in G = \mathrm{Ker}\,(f_2)$, donc $f_2(v) = 0$.

D'où : $z = f_2\big(f_1(x)\big) = f_2 \circ f_1(x) \in \mathrm{Im}\,(f_2 \circ f_1)$.

Ceci montre : $F \subset \mathrm{Im}\,(f_2 \circ f_1)$.

On conclut : $\mathrm{Im}\,(f_2 \circ f_1) = F$.

$\star$ $*$ On a : $\mathrm{Ker}\,(f_2 \circ f_1) \supset \mathrm{Ker}\,(f_1) = G$.

$*$ Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(f_2 \circ f_1)$; On a $f_2\big(f_1(x)\big) = 0$, donc :

$$f_1(x) \in \mathrm{Im}\,(f_1) \cap \mathrm{Ker}\,(f_2) = F \cap G = \{0\},$$

d'où $x \in \mathrm{Ker}\,(f_1) = G$.

Ceci montre : $\operatorname{Ker}(f_2 \circ f_1) \subset G$.

On conclut : $\operatorname{Ker}(f_2 \circ f_1) = G$.

On a obtenu : $f_2 \circ f_1 \in \mathcal{G}$.

2) Neutre :

Considérons le projecteur p sur F parallèlement à G.
On a : $p \in \mathcal{L}(E)$, $\operatorname{Im}(p) = F$, $\operatorname{Ker}(p) = G$, donc : $p \in \mathcal{G}$.

Soit $f \in \mathcal{G}$.

⋆ Comme : $\forall x \in E,\ \ f(x) \in \operatorname{Im}(f) = F$,

on a : $\forall x \in E,\ \ p\big(f(x)\big) = f(x)$,

ce qui montre : $p \circ f = f$.

⋆ On a : $\forall x \in E,\ \ x - p(x) \in \operatorname{Ker}(p) = G = \operatorname{Ker}(f)$,

donc : $\forall x \in E,\ \ f\big(x - p(x)\big) = 0$,

c'est-à-dire : $\forall x \in E,\ \ f(x) = f\big(p(x)\big)$,

ce qui montre : $f = f \circ p$.

Ainsi, p est neutre pour $\circ$ dans $\mathcal{G}$.

3) Associativité :

Il est connu que la loi $\circ$ est associative.

4) Symétriques :

Soit $f \in \mathcal{G}$. Puisque F est un supplémentaire de $G = \operatorname{Ker}(f)$ dans E, d'après le théorème d'isomorphisme, l'application :

$$f' : F \longrightarrow \operatorname{Im}(f) = F,\quad x \longmapsto f(x)$$

est un isomorphisme de K-ev.

Considérons $g : E \longrightarrow E,\ \ x \longmapsto f'^{-1}\big(p(x)\big)$,

où p a été défini plus haut.

⋆ Il est clair que g est linéaire.

On a : $\operatorname{Im}(g) = f'^{-1}\big(p(E)\big) = f'^{-1}(F) = F$.

On a, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker}(g) &\iff g(x) = 0 \iff f'^{-1}\big(p(x)\big) = 0 \\ &\iff p(x) = 0 \iff x \in G, \end{aligned}$$

donc : $\operatorname{Ker}(g) = G$.

Ceci montre : $g \in \mathcal{G}$.

⋆ On a, pour tout $x \in E$:

$$(f \circ g)(x) = f\big(f'^{-1}\big(p(x)\big)\big) = f'\big(f'^{-1}\big(p(x)\big)\big) = p(x),$$

donc : $f \circ g = p$.

⋆ Soit $x \in E$.
Comme $f(x) \in \operatorname{Im}(f) = F$, on a : $p\big(f(x)\big) = f(x)$, puis :

$$g\big(f(x)\big) = f'^{-1}\big(p\big(f(x)\big)\big) = f'^{-1}\big(f(x)\big).$$

Mais $f = f \circ p$, donc :

$$f'^{-1}\big(f(x)\big) = f'^{-1}\big(f\big(p(x)\big)\big) = f'^{-1}\big(f'\big(p(x)\big)\big) = p(x).$$

Ainsi : $g \circ f = p$.

Ceci montre : $g \circ f = f \circ g = p$,

donc f admet g pour symétrique dans $(\mathcal{G}, \circ)$.

Finalement : $(\mathcal{G}, \circ)$ est un groupe.

b) ⋆ Pour tout $f \in \mathcal{G}$, comme $\operatorname{Im}(f) = F$ et $\operatorname{Ker}(f) = G$, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où M est la matrice de l'endomorphisme f' induit par f sur F.

De plus : $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}(f) = \dim(F) = p$.

Il en résulte $M \in \mathbf{GL}_p(K)$, donc $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$.

On peut donc considérer l'application

$$\theta : \mathcal{G} \longrightarrow H,\quad f \longmapsto \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f).$$

⋆ Réciproquement, considérons l'application φ qui, à une matrice A de H, associe l'endomorphisme f de E tel que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$.

Avec ces notations, puisque $A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, où $M \in \mathbf{GL}_p(K)$, on a :

$$\operatorname{Im}(f) = F \text{ et } \operatorname{Ker}(f) = G,$$

donc : $f \in \mathcal{G}$.

⋆ Il est clair que θ et φ sont des applications réciproques l'une de l'autre, donc sont bijectives.

⋆ De plus, avec des notations évidentes :

$$\begin{aligned} \forall f_1, f_2 \in \mathcal{G},\ \ \theta(f_2)\theta(f_1) &= \begin{pmatrix} M_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_2M_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \theta(f_2 \circ f_1). \end{aligned}$$

Ainsi, θ est un isomorphisme de $(\mathcal{G}, \circ)$ sur $(H, \cdot)$.

⋆ Comme $(\mathcal{G}, \circ)$ est un groupe, par transport de structure, $(H, \cdot)$ est un groupe.

Finalement, l'application $\theta : f \longmapsto \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme du groupe $(\mathcal{G}, \circ)$ sur le groupe $(H, \cdot)$.

1.17

Soit H un hyperplan de $\mathbf{M}_n(K)$. Raisonnons par l'absurde : supposons : $H \cap \mathbf{GL}_n(K) = \varnothing$.

1) Montrons que H contient toutes les matrices nilpotentes.

Soit $N \in \mathbf{M}_n(K)$, nilpotente.

Raisonnons par l'absurde : supposons $N \notin H$.

D'après le cours, puisque $N \notin H$ et que H est un hyperplan de $\mathbf{M}_n(K)$, on a : $\mathbf{M}_n(K) = H \oplus KN$.

En particulier, il existe $M \in H$ et $\alpha \in K$ tels que :

$$\mathrm{I}_n = M + \alpha N.$$

Alors : $M = \mathrm{I}_n - \alpha N$.

Puisque N est nilpotente, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0$ d'où :

$$\begin{cases} (\mathrm{I}_n - \alpha N)\Big(\displaystyle\sum_{p=0}^{k-1} (\alpha N)^p\Big) = \mathrm{I}_n - \alpha^k N^k = \mathrm{I}_n \\ \Big(\displaystyle\sum_{p=0}^{k-1} (\alpha N)^p\Big)(\mathrm{I}_n - \alpha N) = \mathrm{I}_n - \alpha^k N^k = \mathrm{I}_n, \end{cases}$$

d'où : $\mathrm{I}_n - \alpha N \in \mathbf{GL}_n(K)$.

Ainsi : $M \in H \cap \mathbf{GL}_n(K)$, contradiction.

Ceci montre que H contient toutes les matrices nilpotentes.

2) Considérons les matrices suivantes de $\mathbf{M}_n(K)$:

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & (0) & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \ N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que N_1 et N_2 sont nilpotentes.

D'après *1)* : $N_1 \in H$ et $N_2 \in H$, puis, comme H est un sev : $N_1 + N_2 \in H$.

$$\text{Mais :}\ \ N_1 + N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & (0) & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

qui est inversible, contradiction.

Ce raisonnement par l'absurde montre que tout hyperplan de $\mathbf{M}_n(K)$ rencontre $\mathbf{GL}_n(K)$.

1.18

a) On a, par exemple : $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -B \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

La matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -B \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}$ est triangulaire, à éléments diagonaux tous non nuls (car égaux à 1), donc cette matrice est inversible, d'où, d'après le cours :

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

D'autre part, il est clair (par la méthode de Gauss, par exemple) que $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = n + \operatorname{rg}(C)$.

On conclut : $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = n + \operatorname{rg}(C)$.

b) On a, à l'aide de produits par blocs :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & R \\ -S & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ S & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n + RS & R \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & R \\ -S & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -R \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ -S & \mathrm{I}_p + SR \end{pmatrix}.$$

Les matrices carrées $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ S & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -R \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}$ sont inversibles (comme en *1)*), donc, d'après le cours :

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & R \\ -S & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n + RS & R \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & R \\ -S & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ -S & \mathrm{I}_p + SR \end{pmatrix}.$$

D'après *a)* et le résultat analogue pour des matrices triangulaires inférieures par blocs (se démontrant comme en *a)*, ou par transposition à partir du résultat de *a)*), on a :

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n + RS & R \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} = p + \operatorname{rg}(\mathrm{I}_n + RS),$$

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ -S & \mathrm{I}_p + SR \end{pmatrix} = n + \operatorname{rg}(\mathrm{I}_p + SR).$$

On conclut : $p + \operatorname{rg}(\mathrm{I}_n + RS) = n + \operatorname{rg}(\mathrm{I}_p + SR)$.

1.19

a) Notons $a = \operatorname{rg}(A)$, $b = \operatorname{rg}(B)$. D'après le cours, il existe $P, Q \in \mathbf{GL}_n(K)$, $R, S \in \mathbf{GL}_p(K)$ telles que :

$$A = P\mathrm{J}_{n,a}Q, \quad B = R\mathrm{J}_{p,b}S,$$

où $\mathrm{J}_{n,a} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K)$, $\mathrm{J}_{p,b} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_p(K)$.

On a alors, en faisant des produits de matrices diagonales par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P\mathrm{J}_{n,a}Q & 0 \\ 0 & R\mathrm{J}_{p,b}S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{J}_{n,a} & 0 \\ 0 & \mathrm{J}_{p,b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ sont inversibles.

On a donc :

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \mathrm{J}_{n,a} & 0 \\ 0 & \mathrm{J}_{p,b} \end{pmatrix} = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B).$$

b) On suppose que les matrices $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont équivalentes. D'après *a)*, on a alors : $2\operatorname{rg}(A) = 2\operatorname{rg}(B)$, donc $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$, et on conclut que les matrices A et B sont équivalentes.

c) On suppose que A et B sont équivalentes et que $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$ sont équivalentes. On a alors $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$, et, d'après *a)*; $\operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(U) = \operatorname{rg}(B) + \operatorname{rg}(V)$.

Il s'ensuit : $\operatorname{rg}(U) = \operatorname{rg}(V)$, donc les matrices U et V sont équivalentes.

1.20

Il suffit de trouver un couple $(u, v) \in \mathcal{L}(E))^2$ tel que :

$$u \circ f \circ v = p,$$

où p est le projecteur sur F parallèlement à G.

Notons $r = \operatorname{rg}(f)$, $d = \dim(F) = \operatorname{rg}(p)$.

Le K-ev E, de dimension finie, admet au moins une base $\mathcal{B}$. Notons A, P_1 les matrices respectives de f, p dans $\mathcal{B}$.

D'après le cours, il existe $P, Q, R, S \in \mathbf{GL}_n(K)$ telles que :

$$A = P\mathrm{J}_r Q \text{ et } P_1 = R\mathrm{J}_d S,$$

où $\mathrm{J}_r = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K)$, $\quad \mathrm{J}_d = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K)$.

Soient $(u, v) \in \big(\mathcal{L}(E)\big)^2$ quelconque.

Notons U, V les matrices respectives de u, v dans $\mathcal{B}$.

On a :

$$u \circ f \circ v = p \iff UAV = P_1 \iff UP\mathrm{J}_r QV = R\mathrm{J}_d S \iff (R^{-1}UP)\mathrm{J}_r(QVS^{-1}) = \mathrm{J}_d.$$

Choisissons : $U = R\mathrm{J}_r P^{-1}$ et $V = Q^{-1}\mathrm{J}_d S$.

On a alors : $(R^{-1}UP)\mathrm{J}_r(QVS^{-1}) = \mathrm{J}_r\mathrm{J}_r\mathrm{J}_d = \mathrm{J}_\mathrm{d}$, car $d \leqslant r$.

Ainsi, il existe $(u, v) \in \big(\mathcal{L}(E)\big)^2$ convenant.

CORRIGÉS

1.21

1re méthode : Recherche de l'inverse par résolution d'un système :
Cherchons l'éventuel inverse de M sous forme de matrice décomposée en blocs, dans le même format que pour M. Soit $N = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$. On a :

$$MN = \mathrm{I}_{n+p} \iff \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} AX + BZ = \mathrm{I}_n & (1) \\ AY + BT = 0 & (2) \\ CX + DZ = 0 & (3) \\ CY + DT = \mathrm{I}_p & (4). \end{cases}$$

Les équations (1) et (3) ont pour inconnues X et Z, les équations (2) et (4) ont pour inconnues Y et T.

Puisque A est inversible :
$$\begin{cases} (2) \\ (4) \end{cases} \iff \begin{cases} Y = -A^{-1}BT \\ (D - CA^{-1}B)T = \mathrm{I}_p \quad (5). \end{cases}$$

Si $D - CA^{-1}B$ n'est pas inversible, l'équation (5) n'a pas de solution (en T), donc M n'est pas inversible.

Supposons $D - CA^{-1}B$ inversible.

Alors : $\begin{cases} (2) \\ (4) \end{cases} \iff \begin{cases} Y = -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ T = (D - CA^{-1}B)^{-1}. \end{cases}$

D'autre part, puisque A est inversible :
$$\begin{cases} (1) \\ (3) \end{cases} \iff \begin{cases} X + A^{-1}BZ = A^{-1} \\ CX + DZ = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} X + A^{-1}BZ = A^{-1} \\ (D - CA^{-1}B)Z = -CA^{-1} \quad [L_2 \longleftarrow L_2 - CL_1] \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} Z = -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\ X = A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}. \end{cases}$$

On conclut que la matrice carrée M est inversible si et seulement si $D - CA^{-1}B$ est inversible et que, dans ce cas, en notant $E = (D - CA^{-1}B)^{-1}$, on a :
$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BECA^{-1} & -A^{-1}BE \\ -ECA^{-1} & E \end{pmatrix}.$$

2e méthode : Utilisation d'une factorisation par blocs :
On remarque (cf. aussi l'exercice 1.24) :
$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ -CA^{-1} & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}\overbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}^{M}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

Les deux matrices autour de M sont triangulaires et à termes diagonaux tous non nuls (car égaux à 1), donc ces deux matrices sont inversibles. Il en résulte que M est inversible si et seulement si $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$ est inversible, ce qui revient, puisque A est supposée inversible, à ce que $D-CA^{-1}B$ soit inversible.

On a alors, en notant $E = (D-CA^{-1}B$ pour la commodité :
$$M = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ -CA^{-1} & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}^{-1}$$
donc :
$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ -CA^{-1} & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BECA^{-1} & -A^{-1}BE \\ -ECA^{-1} & E \end{pmatrix}.$$

1.22

1) $\star$ On a $E \subset \mathbf{M}_{n,p}(K)$ et $0 \in E$.

$\star$ On a, pour tout $\alpha \in K$ et tous $X, Y \in E$:
$$A(\alpha X + Y)B = \alpha \underbrace{AXB}_{=0} + \underbrace{AYB}_{=0} = 0,$$
donc $\alpha X + Y \in E$.

On conclut : E est un K-ev.

2) D'après le cours, il existe des matrices $P, Q \in \mathbf{GL}_n(K)$, $R, S \in \mathbf{GL}_p(K)$ telles que :
$$A = P\mathrm{J}_{m,n,a}Q \quad \text{et} \quad B = R\mathrm{J}_{p,q,b}S,$$
où on a noté : $a = \mathrm{rg}\,(A)$, $b = \mathrm{rg}\,(B)$,
$$\mathrm{J}_{m,n,a} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{m,n}(K),$$
$$\mathrm{J}_{p,q,b} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p,q}(K).$$

On peut supposer, par exemple $a \leqslant b$, et décomposer en neuf blocs :
$$\mathrm{J}_{m,n,a} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{J}_{p,q,b} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_a & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{b-a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $X \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, quelconque. On a :
$$X \in E \iff AXB = 0 \iff \mathrm{J}_{m,n,a}Q)X(R\mathrm{J}_{p,q,b}S) = 0$$
$$\iff \mathrm{J}_{m,n,a}(QXR)\mathrm{J}_{p,q,b} = 0.$$

Décomposons QXR en blocs : $QXR = \begin{pmatrix} U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \\ U_3 & V_3 & W_3 \end{pmatrix}$.

On obtient, par produit par blocs de trois matrices :
$$\mathrm{J}_{m,n,a}(QXR)\mathrm{J}_{p,q,b} = \begin{pmatrix} U_1 & V_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc : $X \in E \iff (U_1 = 0 \text{ et } V_1 = 0)$.

Ainsi, l'application $X \longmapsto QXR$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de E sur le K-ev des matrices décomposées en neuf blocs et telles que les deux premiers blocs soient nuls.

Il en résulte : $\dim\,(E) = np - ab$.

Le résultat est identique lorsque $a \geqslant b$.

On conclut : $\dim\,(E) = np - \mathrm{rg}\,(A)\,\mathrm{rg}\,(B)$.

1.23

Notons $r = \text{rg}\,(A) < n$ et :

$$M_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{r+1}(K),$$

$$N_r = \begin{pmatrix} M_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K).$$

Il est clair que M_r est nilpotente, donc N_r est nilpotente.

Comme $\text{rg}\,(A) = r = \text{rg}\,(N_r)$, il existe $P, Q \in \mathbf{GL}_n(K)$ telles que : $A = PN_rQ$. On a alors : $A = (\underbrace{PQ}_{\text{notée } B})(\underbrace{Q^{-1}N_rQ}_{\text{notée } C})$.

Alors, B, C sont dans $\mathbf{M}_n(K)$, B est inversible car P et Q le sont, et C est nilpotente, car :

$$C^{r+1} = (Q^{-1}N_rQ)^{r+1} = Q^{-1}N_r^{r+1}Q = Q^{-1}0Q = 0.$$

Le couple (B, C) convient.

1.24

On a l'égalité suivante, par produit par blocs :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ CA^{-1} & -\mathrm{I}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & CA^{-1}B - D \end{pmatrix}.$$

Les matrices $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ CA^{-1} & -\mathrm{I}_p \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}$

sont triangulaires, à termes diagonaux tous non nuls (car égaux à 1), donc ces deux matrices sont inversibles.

Il en résulte, d'après le cours :

$$\text{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & CA^{-1}B - D \end{pmatrix}.$$

D'après l'exercice 1.19 :

$$\text{rg}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & CA^{-1}B - D \end{pmatrix} = \text{rg}\,(A) + \text{rg}\,(CA^{-1}B - D) = n + \text{rg}\,(CA^{-1}B - D).$$

D'où :

$$\begin{aligned} \text{rg}\,(M) = n &\iff n = n + \text{rg}\,(CA^{-1}B - D) \\ &\iff \text{rg}\,(CA^{-1}B - D) = 0 \\ &\iff CA^{-1}B - D = 0 \iff D = CA^{-1}B. \end{aligned}$$

1.25

Récurrence sur p.

⋆ La propriété est évidente pour $p = 1$.

⋆ Supposons-la vraie pour un $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $F_1, \dots, F_{p+1}$ des sev de E tels que $\bigcup_{i=1}^{p+1} F_i = E$. Si $F_{p+1} = E$, alors le résultat voulu est acquis.

Supposons donc $F_{p+1} \neq E$. Il existe alors $x \in E$ tel que $x \notin F_{p+1}$. Comme $E = \bigcup_{i=1}^{p+1} F_i$, on a alors $x \in \bigcup_{i=1}^{p} F_i$.

Si $\bigcup_{i=1}^{p} F_i = E$, alors, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe $i \in \{1, \dots, p\}$ tel que $F_i = E$, donc, a fortiori, il existe $i \in \{1, \dots, p+1\}$ tel que $F_i = E$, d'où le résultat voulu.

Supposons donc $\bigcup_{i=1}^{p} F_i \neq E$.

Il existe alors $y \in E$ tel que $y \notin \bigcup_{i=1}^{p} F_i$, c'est-à-dire :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad y \notin F_i.$$

L'idée consiste maintenant à remarquer que la droite affine passant par y et dirigée par x ne rencontre les F_i qu'en un nombre fini de points.

Puisque K est infini, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+2} \in K$ deux à deux distincts. Les $p+2$ vecteurs $y + \lambda_k x$, pour $k \in \{1, \dots, p+2\}$ sont dans $E = \bigcup_{i=1}^{p+1} F_i$. Il existe donc $i \in \{1, \dots, p+1\}$ et $k, \ell \in \{1, \dots, p+2\}$ distincts, tels que :

$$y + \lambda_k x \in F_i \quad \text{et} \quad y + \lambda_\ell x \in F_i.$$

Comme $y = \dfrac{1}{\lambda_\ell - \lambda_k}\big(\lambda_\ell(y + \lambda_k x) - \lambda_k(y + \lambda_\ell x)\big) \in F_i$,

on a nécessairement $i \notin \{1, \dots, p\}$, donc $i = p+1$.

Comme $x = \dfrac{1}{\lambda_k - \lambda_\ell}\big((y + \lambda_k x) - (y + \lambda_\ell x)\big) \in F_i$,

on a nécessairement $i \neq p+1$.

On aboutit à une contradiction.

Ceci montre : $\exists\, i \in \{1, \dots, p+1\}, \quad F_i = E$,

et établit le résultat voulu, par récurrence sur p.

1.26

a) On a, pour tout $h \in G$:

$$p \circ h = \frac{1}{n}\Big(\sum_{g \in G} g\Big) \circ h = \frac{1}{n}\sum_{g \in G} g \circ h = \frac{1}{n}\sum_{k \in G} k = p,$$

car l'application $g \longmapsto g \circ h$ est une permutation de G.

b) On déduit :

$$p^2 = p \circ \Big(\frac{1}{n}\sum_{g \in G} g\Big) = \frac{1}{n}\sum_{g \in G} p \circ g = \frac{1}{n}\sum_{g \in G} p = \frac{1}{n}np = p,$$

donc p est un projecteur de E.

c) 1) Soit $x \in \bigcap_{g \in G} \text{Ker}\,(g - e)$.

On a alors : $\forall g \in G, \quad (g - e)(x) = 0$,

c'est-à-dire : $\forall g \in G, \quad g(x) = x$,

d'où : $p(x) = \dfrac{1}{n}\sum_{g \in G} g(x) = \dfrac{1}{n}\sum_{g \in G} x = \dfrac{1}{n}nx = x$,

et donc : $x \in \text{Im}\,(p)$.

Ceci montre : $\bigcap_{g \in G} \text{Ker}\,(g - e) \subset \text{Im}\,(p)$.

2) Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Im}\,(p)$.

Puisque p est un projecteur, on a alors : $p(x) = x$.

D'où : $\quad \forall g \in G, \quad g(x) = g\big(p(x)\big) = g \circ p(x)$.

Mais, comme en *a)* (de l'autre côté), on a :

$$\forall g \in G, \quad g \circ p = p.$$

D'où : $\quad \forall g \in G, \quad g(x) = p(x) = x,$

et donc : $\quad \forall g \in G, \quad x \in \mathrm{Ker}\,(g - e)$.

Ceci montre : $\quad \forall g \in G, \quad \mathrm{Im}\,(p) \subset \mathrm{Ker}\,(g - e),$

et donc : $\quad \mathrm{Im}\,(p) \subset \bigcap_{g \in G} \mathrm{Ker}\,(g - e)$.

On conclut à l'égalité : $\mathrm{Im}\,(p) = \bigcap_{g \in G} \mathrm{Ker}\,(g - e)$.

d) D'après *c)* et puisque p est un projecteur en dimension finie :

$$\dim \Big(\bigcap_{g \in G} \mathrm{Ker}\,(g - e) \Big) = \dim \mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{rg}\,(p)$$

$$= \mathrm{tr}\,(p) = \mathrm{tr}\,\Big(\frac{1}{n} \sum_{g \in G} g \Big) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \mathrm{tr}\,(g).$$

Remarque : Il en résulte que $\sum_{g \in G} \mathrm{tr}\,(g)$ est un entier naturel multiple de n.

Chapitre 2

Déterminants

Plan

Les méthodes à retenir	28
Vrai ou faux ?	33
Les énoncés des exercices	34
Du mal à démarrer ?	37
Vrai ou faux, les réponses	38
Les corrigés des exercices	39

K désigne
un corps commutatif.

Thèmes abordés dans les exercices

- Calculs de déterminants
- Étude de l'inversibilité d'une matrice carrée, par l'étude de son déterminant.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définitions et propriétés de : déterminant d'une famille de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n, déterminant d'un endomorphisme, déterminant d'une matrice carrée
- Calcul pratique des déterminants : opérations licites sur les colonnes, sur les lignes, développement par rapport à une rangée.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour calculer un déterminant d'ordre trois ou quatre

- Essayer de faire apparaître des 0 par des opérations licites sur les lignes ou sur les colonnes, pour développer ensuite par rapport à une rangée ne contenant qu'un terme non nul, si possible.
- Factoriser le plus possible au fur et à mesure des calculs.

➟ **Exercice 2.1**

Exemple

Pour $(a,b,c) \in K^3$, calculer le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & b+c & b^2+c^2 \\ 1 & c+a & c^2+a^2 \\ 1 & a+b & a^2+b^2 \end{vmatrix}.$$

1re méthode : combinaison linéaire de rangées puis développement :

On a, par $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1,\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & b+c & b^2+c^2 \\ 0 & a-b & a^2-b^2 \\ 0 & a-c & a^2-c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & a^2-b^2 \\ a-c & a^2-c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(a-c)\begin{vmatrix} 1 & a+b \\ 1 & a+c \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(c-b).$$

2e méthode : intervention d'un déterminant de Vandermonde :

En notant $s_1 = a+b+c,\ s_2 = a^2+b^2+c^2$, puis en effectuant $C_2 \longleftarrow C_2 - s_1C_1,\ C_3 - s_2C_1$, on a :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & s_1-a & s_2-a^2 \\ 1 & s_1-b & s_2-b^2 \\ 1 & s_1-c & s_2-c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a & -a^2 \\ 1 & -b & -b^2 \\ 1 & -c & -c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Exemple

Pour $(a,b,c,d) \in K^4$, calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & a & b & d \\ 1 & a & c & d \\ 1 & b & c & d \end{vmatrix}.$$

On a, par $L_i \longleftarrow L_i - L_1$ pour $i = 2,3,4$:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & d-c \\ 0 & 0 & c-b & 0 \\ 0 & b-a & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & d-c \\ 0 & c-b & 0 \\ b-a & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)\begin{vmatrix} 0 & d-c \\ c-b & 0 \end{vmatrix} = -(b-a)(c-b)(d-c).$$

Méthode

Pour calculer un déterminant d'ordre n

- Essayer de faire apparaître des 0 par des opérations licites sur les lignes ou sur les colonnes, pour développer ensuite par rapport à une rangée ne contenant qu'un terme non nul, si possible, ou pour se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire.

- Factoriser le plus possible au fur et à mesure des calculs.
- Essayer, dans certains cas, de voir si une colonne est combinaison linéaire des autres colonnes, ou si une ligne est combinaison linéaire des autres lignes, auquel cas le déterminant est nul.
- Essayer de faire apparaître des 0 par opérations licites sur les lignes ou sur les colonnes, pour ensuite, en développant, faire apparaître une relation de récurrence, souvent d'ordre un ou d'ordre deux, et enfin calculer le terme général de la suite ainsi considérée.
- Le cas particulier des matrices tridiagonales à coefficients constants est important.
- Utiliser la multilinéarité et l'alternance du déterminant, lorsque les colonnes (ou les lignes) se décomposent linéairement sur des colonnes (ou des lignes) particulières.

➟ **Exercice 2.1**

Exemple

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & (0) & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Si $n \geqslant 3$, on a $C_2 = C_3$, donc $D_n = 0$.

Et, pour $n \leqslant 2$: $D_1 = 1$, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$.

Exemple

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & & (1) \\ & \ddots & \\ (0) & & n \end{vmatrix}.$$

Il s'agit du déterminant d'une matrice triangulaire supérieure, donc, d'après le cours, il est égal au produit des termes diagonaux :

$$D_n = 1 \cdot 2 \cdots n = n!\,.$$

Exemple

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le déterminant D_n de la matrice dont tous les termes sont nuls, sauf ceux de l'antidiagonale qui sont égaux à 1.

En développant par rapport à la dernière colonne, de manière itérée, on a :

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{n+1} D_{n-1} = (-1)^{n+1}(-1)^n D_{n-2} = \dots \\ &= (-1)^{n+1}(-1)^n \cdots (-1)^3 D_1 = (-1)^{n+1}(-1)^n \cdots (-1)^3 1 \\ &= (-1)^{3+\cdots+(n+1)} = (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}-3} \\ &= (-1)^{\frac{n^2+3n-4}{2}} = (-1)^{\frac{(n-1)(n+4)}{2}}. \end{aligned}$$

Exemple

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in K$:

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a & \ddots & (1) & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & (1) & \ddots & a & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}_{[n]}.$$

On a :

$$\begin{aligned} D &\underset{C_1 \longleftarrow C_1+C_2+\cdots+C_n}{=} \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a+n-1 & a & \ddots & (1) & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a+n-1 & (1) & \ddots & a & 1 \\ a+n-1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}_{[n]} \\ &\underset{L_i \longleftarrow L_i - L_1,\ i=2,\dots,n}{=} \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & (0) & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-1 \end{vmatrix}_{[n]} \\ &= (a+n-1)(a-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Exemple

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $a \in \mathbb{C}^*$. On note :

$$A = \left(a^{\mathrm{Min}\,(i,j)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}).$$

Calculer $\det(A)$.

On a : On a :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a & a & a & \dots & a \\ a & a^2 & a^2 & \dots & a^2 \\ a & a^2 & a^3 & \dots & a^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \end{vmatrix}_{[n]} \\ &\underset{\substack{L_i \longleftarrow L_i - L_{i-1}, \\ i=n,\dots,2}}{=} \begin{vmatrix} a & a & a & \dots & a \\ 0 & a^2-a & a^2-a & \dots & a^2-a \\ 0 & 0 & a^3-a^2 & \dots & a^3-a^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a^n-a^{n-1} \end{vmatrix}_{[n]} \\ &= a(a^2-a)(a^3-a^2)\cdots(a^n-a^{n-1}) \\ &= a\big[a(a-1)\big]\big[a^2(a-1)\big]\cdots\big[a^{n-1}(a-1)\big] \\ &= a^{1+(1+\cdots+(n-1))}(a-1)^{n-1} \\ &= a^{1+\frac{(n-1)n}{2}}(a-1)^{n-1} = a^{\frac{n^2-n+2}{2}}(a-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Exemple

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b, c \in K$. On note :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & \ddots & a & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Former une relation de récurrence exprimant D_{n+2} en fonction de D_{n+1} et D_n.

On a, par développement par rapport à la première ligne, puis par développement par rapport à la première colonne :

$$D_{n+2} = aD_{n+1} - b \begin{vmatrix} c & b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a & b & & (0) & \vdots \\ 0 & c & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & a & b \\ 0 & \dots & \dots & \dots & c & a \end{vmatrix}_{[n+1]} = aD_{n+1} - bcD_n.$$

Méthode

Pour calculer le déterminant d'une matrice carrée A non donnée par ses éléments

Essayer d'amener une équation polynomiale satisfaite par A.

Exemple

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A - \mathrm{I}_n$. Calculer $\det(A)$.

On a : $A^2 - A + \mathrm{I}_n = 0$,

d'où : $A^3 + \mathrm{I}_n = (A + \mathrm{I}_n)(A^2 - A + \mathrm{I}_n) = 0$,

donc : $A^3 = -\mathrm{I}_n$.

On déduit : $\big(\det(A)\big)^3 = \det(A^3) = \det(-\mathrm{I}_n) = (-1)^n = (-1)^{3n}$.

Comme l'application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^3$ est injective, on conclut : $\det(A) = -1$.

Méthode

Pour étudier le déterminant d'une matrice carrée décomposée en blocs

Essayer de faire intervenir une matrice triangulaire par blocs et utiliser la formule du cours : $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$ pour des matrices carrées A et C.

➟ **Exercice 2.10**

Exemple

Soient $A \in \mathbf{GL}_n(K)$, $B, C, D \in \mathbf{M}_n(K)$ telles que $AB = BA$. Montrer :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC).$$

On a, par produit par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & DA - BC \end{pmatrix},$$

d'où, en passant aux déterminants :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & DA - BC \end{pmatrix}.$$

D'après le résultat du cours sur le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, on a :

$$\det\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det(\mathrm{I}_n)\det(A) = \det(A)$$

$$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & DA - BC \end{pmatrix} = \det(A)\det(DA - BC).$$

Comme A est inversible, on a $\det(A) \neq 0$, en simplifiant par $\det(A)$, on conclut : $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC)$.

Méthode

Pour calculer le déterminant d'un endomorphisme d'un ev E de dimension finie

Se ramener au déterminant d'une matrice carrée, en considérant la matrice de f dans une base convenable de E.

➟ **Exercice 2.3**

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. calculer le déterminant de l'endomorphisme

$$f : \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}_n[\mathrm{X}], \quad P \longmapsto \mathrm{X}P' + P.$$

D'abord, il est clair que f est bien une application de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et que f est linéaire, donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

On a : $\forall k \in \{0, ..., n\}, \quad f(\mathrm{X}^k) = \mathrm{X}k\mathrm{X}^{k-1} + \mathrm{X}^k = (k+1)\mathrm{X}^k$,

donc la matrice A de f dans la base canonique $(1, \mathrm{X}, ..., \mathrm{X}^n)$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est : $\quad A = \mathrm{diag}\,(1, 2, ..., n+1)$.

Puisque A est diagonale, on a :

$$\det(A) = 1 \cdot 2 \cdots (n+1) = (n+1)!$$

et on conclut : $\qquad \boxed{\det(A) = (n+1)!}$.

Vrai ou Faux ?

2.1 On a, pour tous $\alpha \in \mathbb{K}$ et toute $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$: $\det(\alpha A) = \alpha \det(A)$. V F

2.2 Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$, et on a alors :
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$
V F

2.3 Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments de sa diagonale. V F

2.4 Si une matrice B est obtenue à partir d'une matrice carrée A en permutant, d'une façon quelconque, les colonnes de A, alors : $\det(B) = -\det(A)$. V F

2.5 Le déterminant d'une matrice carrée antisymétrique d'ordre impair est nul. V F

2.6 Un déterminant est inchangé lorsqu'on remplace une colonne par une combinaison linéaire de toutes les colonnes. V F

2.7 Un déterminant est inchangé lorsqu'on remplace simultanément chaque colonne par celle-ci plus une combinaison linéaire des autres colonnes. V F

2.8 Un déterminant est inchangé lorsqu'on remplace simultanément chaque colonne par celle-ci plus une combinaison linéaire des colonnes suivantes. V F

2.9 On a, pour tout endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie :
$$f \in \mathcal{GL}(E) \iff \det(f) \neq 0.$$
V F

2.10 On a, pour tout endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-ev E et tout automorphisme h de E :
$$\det(h \circ f \circ h^{-1}) = \det(f).$$
V F

Énoncés des exercices

2.1 Exemples de calculs de déterminants d'ordre trois

Calculer les déterminants d'ordre trois suivants, en exprimant le résultat sous forme factorisée, pour $(a, b, c) \in K^3$:

a) $\begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ b & c & bc \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2a & a-b-c & 2a \\ b-c-a & 2b & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$.

2.2 Exemples de calculs de déterminants d'ordre quatre

Calculer les déterminants d'ordre quatre suivants, en exprimant le résultat sous forme factorisée, pour $a, b, c, d, x \in K$:

a) $\begin{vmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & b+c+d \\ 1 & b & b^3 & c+d+a \\ 1 & c & c^4 & d+a+b \\ 1 & d & d^5 & a+b+c \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} (1+x)^2 & (2+x)^2 & (3+x)^2 & (4+x)^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$.

2.3 Déterminant de l'endomorphisme de transposition sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note : $f : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad M \longmapsto f(M) = M^\top$.

a) Vérifier : $f \in \mathcal{L}\big(\mathbf{M}_n(\mathbb{R})\big)$.

b) Calculer $\operatorname{rg}(f),\ \operatorname{tr}(f),\ \det(f)$.

2.4 Exemples de calculs de déterminants d'ordre n

Calculer les déterminants suivants, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, ..., a_n$, x, $a, b \in K$:

a) $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}_{[n]}$

b) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix}_{[n]}$

c) $\det\left(a^{\mathrm{Max}\,(i,j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

d) $\begin{vmatrix} x+a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & x+a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_3 & a_3 & x+a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \dots & x+a_n \end{vmatrix}_{[n]}$

e) $\det\left((ij+i+j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right)$

f) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a & b & \ddots & (0) & \vdots \\ a^2 & ab & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & b & -1 \\ a^n & a^{n-1}b & \dots & ab & b \end{vmatrix}_{[n+1]}$

g) $\begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \dots & 0 \\ a & 1+a^2 & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & \ddots & 1+a^2 & a \\ 0 & \dots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}_{[n]}$.

2.5 Déterminant d'une matrice obtenue par des changements de signes

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(K)$. On note $B = \left((-1)^{i+j}a_{ij}\right)_{ij} \in \mathbf{M}_n(K)$.

Montrer : $\det(B) = \det(A)$.

2.6 Égalité de déterminants à partir d'autres égalités de déterminants

Soient $A, B, C \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$\det(B) = \det(C) \quad \text{et} \quad \det(A + \mathrm{i}\,B) = \det(A + \mathrm{i}\,C).$$

Montrer : $\det(A+B) = \det(A+C)$.

2.7 Exemple de calcul d'un déterminant d'ordre n

Calculer le déterminant d'ordre n suivant, pour $a_1, ..., a_n, x \in K$ fixés :

$$D = \begin{vmatrix} a_1^2+x & a_1a_2 & \dots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2+x & \dots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \dots & a_n^2+x \end{vmatrix}_{[n]}.$$

2.8 Déterminant d'une matrice à termes entiers, parité

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, ..., n\}, \quad a_{ii} \in 2\,\mathbb{Z} \\ \forall (i,j) \in \{1, ..., n\}^2, \quad \big(i \neq j \implies a_{ij} \in 2\,\mathbb{Z} + 1\big). \end{cases}$$

a) Montrer : $n + \det(A) \in 2\,\mathbb{Z} + 1$.

b) En déduire que, si n est pair, alors A est inversible.

2.9 Signe du déterminant d'un polynôme particulier de matrices carrées

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$, $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ tel que $p^2 - 4q \leqslant 0$.
Montrer : $\det(A^2 + pAB + qB^2) \geqslant 0$.

2.10 Déterminant dans le contexte des déterminants de Vandermonde

Calculer, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $x_1, ..., x_n \in K$ le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & x_2 \cdots x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & x_1 \cdots x_{n-1} \end{vmatrix}_{[n]}.$$

2.11 Égalité de produits de déterminants, intervention de blocs

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B, C, D \in \mathbf{M}_n(K)$ telles que A et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ soient inversibles.

On note $M^{-1} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$.

a) Montrer : $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ C & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$.

b) En déduire : $\det(S) \neq 0$ et $\det(M)\det(S) = \det(A)$.

2.12 Déterminant par blocs, nombres complexes

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} A & \mathrm{i}\,B \\ \mathrm{i}\,B & A \end{pmatrix}$. Montrer : $\det(M) \in \mathbb{R}_+$.

2.13 Étude d'un déterminant de déterminants

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B, C, D \in \mathbf{M}_n(K)$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2n}(K)$.

On suppose : $\mathrm{rg}(M) \leqslant n$. Montrer : $\begin{vmatrix} \det(A) & \det(B) \\ \det(C) & \det(D) \end{vmatrix} = 0$.

2.14 Il n'y a pas de formule simple pour $\det(A+M)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Trouver toutes les matrices $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ telles qu'il existe une application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que :

$$\forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \quad \det(A+M) = f\big(\det(M)\big).$$

Du mal à démarrer ?

2.1 Essayer de faire apparaître des 0 par opérations licites sur les lignes ou sur les colonnes, pour développer ensuite par rapport à une rangée contenant deux 0, ou pour combiner avec la règle de Sarrus, valable pour les déterminants d'ordre 2 ou 3.

2.2 *a)* Essayer de faire apparaître des 0 par opérations licites sur les lignes ou sur les colonnes, pour développer ensuite par rapport à une rangée contenant trois 0.

b) Remarquer que, en notant $s = a + b + c + d$, la quatrième colonne est combinaison linéaire des deux premières colonnes.

c) Par opérations licites sur les colonnes, se ramener à des déterminants plus simples.

2.3 *a)* Immédiat.

b) Former la matrice de f dans une base de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ formée d'une base de $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ suivie d'une base de $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$.

2.4 *a)* Opérer $C_j \longleftarrow C_j - C_n$ pour $j = 1, ..., n-1$, et se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire.

b) Opérer $L_i \longleftarrow L_i - L_1$ pour $i = 2, ..., n$, et se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire.

c) Opérer $L_i \longleftarrow L_i - L_{i+1}$ pour $i = 1, ..., n-1$, et se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire.

d) Opérer $C_j \longleftarrow C_j - C_1$ pour $j = 2, ..., n$, pour faire apparaître des 0, des x, des $-x$, puis opérer $L_1 \longleftarrow L_1 + \sum_{i=2}^{n} L_i$, et se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire.

e) Remarquer que les colonnes du déterminant proposé se décomposent linéairement sur deux colonnes fixes.

f) Développer le déterminant D_{n+1} proposé par rapport à la dernière colonne et obtenir une relation de récurrence donnant D_{n+1} en fonction de D_n.

g) Développer le déterminant D_n proposé par rapport à sa première ligne (par exemple), puis développer le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu par rapport à sa première colonne. Montrer ainsi que la suite $(D_n)_n$ est une suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre, d'où le calcul de son terme général.

2.5 *1re méthode :* revenir à la définition du déterminant d'une matrice carrée comme sommation de produits, indexée par le groupe symétrique.

2e méthode : remarquer que $B = DAD$, où D est la matrice diagonale $\operatorname{diag}\big((-1)^i\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

2.6 Considérer la fonction polynomiale

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \longmapsto \det(A + xB) - \det(A + xC).$$

2.7 En notant $\mathcal{B} = (\mathrm{E}_1, ..., \mathrm{E}_n)$ la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, le déterminant proposé est celui d'une famille de colonnes décomposées linéairement sur $\mathrm{E}_1, ..., \mathrm{E}_n, A$. Utiliser la multilinéarité et l'alternance de $\det_{\mathcal{B}}$.

2.8 *a)* Passer modulo 2.

b) Remarquer qu'un entier impair n'est pas nul.

2.9 Utiliser la factorisation de $\mathrm{X}^2 + p\mathrm{X} + q$ dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

2.10 En multipliant, pour chaque i, la ligne numéro i par x_i, se ramener à un déterminant de Vandermonde.

2.11 *a)* Effectuer le produit par blocs proposé.

b) Passer aux déterminants dans le résultat précédent et utiliser le produit par blocs MM^{-1}.

2.12 Effectuer des combinaisons linéaires par blocs pour faire apparaître $A + \mathrm{i}\,B$ et $A - \mathrm{i}\,B$.

2.13 Séparer en cas selon que A ou B est inversible ou non.

1er cas : si A est inversible, en multipliant à gauche ou à droite par des matrices inversibles décomposées en blocs, bien choisies, obtenir :

$$\operatorname{rg}(M) = n + \operatorname{rg}(CA^{-1}B - D),$$

déduire $CA^{-1}B - D = 0$, puis exprimer $\det(D)$.

2e cas : si B est inversible, se ramener au premier cas en permutant des colonnes.

3e cas : si A et B ne sont pas inversibles, le résultat est direct.

2.14 *1)* Soit A convenant.

Montrer, pour toute $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, si $\det(M) = 0$, alors : $\det(A + M) = \det(M)$.

Utiliser la décomposition $A = P\mathrm{J}_r Q$.

En étudiant le rang de A, déduire $A = 0$.

2) Réciproque immédiate.

Vrai ou Faux, les réponses

2.1 La formule correcte est : $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$. **F**

2.2 C'est un résultat du cours. **V**

2.3 C'est un résultat du cours. **V**

2.4 Si B est obtenue à partir de A en permutant deux colonnes, alors : $\det(B) = -\det(A)$. **F**
Si B est obtenue à partir de A en permutant plus de deux colonnes, alors :

$$\det(B) = \det(A) \text{ ou } \det(B) = -\det(A).$$

2.5 Si $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ est antisymétrique et d'ordre impair, alors : **V**

$$\det(A) = \det(A^\top) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A),$$

donc $2\det(A) = 0$, puis, en simplifiant par 2, $\det(A) = 0$.

2.6 Contre-exemple : par $C_1 \longleftarrow 2C_1$, le déterminant de l'identité, qui vaut 1, est changé en un déterminant égal à 2. **F**

Une formulation correcte est : un déterminant est inchangé lorsqu'on remplace une colonne par celle-ci plus une combinaison linéaire des autres colonnes.

2.7 Dans un déterminant non nul, le remplacement de C_1 par $C_1 + C_2$ et de C_2 par $C_1 + C_2$ (où C_1 désigne l'ancienne colonne) donne un déterminant ayant deux colonnes égales, donc nul. **F**

2.8 C'est un résultat du cours. **V**

2.9 C'est un résultat du cours. **V**

2.10 On a : $\det(h \circ f \circ h^{-1}) = \det(h)\det(f)\det(h^{-1}) = \det(h)\det(f)\dfrac{1}{\det(h)} = \det(f)$. **V**

CORRIGÉS

Corrigés des exercices

2.1

a)

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a & b & ab\\ a & c & ac\\ b & c & bc\end{vmatrix}\\
\underset{\substack{L_2 \longleftarrow L_2 - L_1\\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_2}}{=}\;& \begin{vmatrix} a & b & ab\\ 0 & c-b & a(c-b)\\ b-a & 0 & (b-a)c\end{vmatrix}\\
=\;& (c-b)(b-a)\begin{vmatrix} a & b & ab\\ 0 & 1 & a\\ 1 & 0 & c\end{vmatrix}\\
\underset{\text{Sarrus}}{=}\;& ac(c-b)(b-a).
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & a & bc\\ 1 & b & ca\\ 1 & c & ab\end{vmatrix}\\
\underset{\substack{L_2 \longleftarrow L_2 - L_1\\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1}}{=}\;& \begin{vmatrix} 1 & a & bc\\ 0 & b-a & c(a-b)\\ 0 & c-a & b(a-c)\end{vmatrix}\\
=\;& (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & bc\\ 0 & 1 & -c\\ 0 & 1 & -b\end{vmatrix}\\
=\;& (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & -c\\ 1 & -b\end{vmatrix}\\
=\;& (a-b)(b-c)(c-a).
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ a^2 & b^2 & c^2\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}\\
\underset{\substack{C_2 \longleftarrow C_2 - C_1\\ C_3 \longleftarrow C_3 - C_1}}{=}\;& \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2\\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3\end{vmatrix}\\
=\;& (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ a^2 & b+a & c+a\\ a^3 & b^2+ba+a^2 & c^2+ca+a^2\end{vmatrix}\\
=\;& (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} b+a & c+a\\ b^2+ba+a^2 & c^2+ca+a^2\end{vmatrix}\\
\underset{L_2 \longleftarrow L_2 - aL_1}{=}\;& (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} b+a & c+a\\ b^2 & c^2\end{vmatrix}\\
\underset{C_2 \longleftarrow C_2 - C_1}{=}\;& (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} b+a & c-b\\ b^2 & c^2-b^2\end{vmatrix}\\
=\;& (b-a)(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} b+a & 1\\ b^2 & c+b\end{vmatrix}\\
=\;& (b-a)(c-a)(c-b)(ab+ac+bc).
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 2a & a-b-c & 2a\\ b-c-a & 2b & 2b\\ 2c & 2c & c-a-b\end{vmatrix}\\
\underset{\substack{C_2 \longleftarrow C_2 - C_1\\ C_3 \longleftarrow C_3 - C_1}}{=}\;& \begin{vmatrix} 2a & -(a+b+c) & 0\\ b-c-a & a+b+c & a+b+c\\ 2c & 0 & -(a+b+c)\end{vmatrix}\\
=\;& (a+b+c)^2\begin{vmatrix} 2a & -1 & 0\\ b-c-a & 1 & 1\\ 2c & 0 & -1\end{vmatrix}\\
\underset{\substack{L_1 \longleftarrow L_1 + L_2 + L_3\\ L_2 \longleftarrow L_2 + L_3}}{=}\;& (a+b+c)^2\begin{vmatrix} a+b+c & 0 & 0\\ b+c-a & 1 & 0\\ 2c & 0 & -1\end{vmatrix}\\
=\;& -(a+b+c)^3.
\end{aligned}$$

2.2

a)

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a & b & c & b\\ b & a & b & c\\ c & b & a & b\\ b & c & b & a\end{vmatrix}\\
\underset{\substack{C_3 \longleftarrow C_3 - C_1\\ C_4 \longleftarrow C_4 - C_2}}{=}\;& \begin{vmatrix} a & b & c-a & 0\\ b & a & 0 & c-a\\ c & b & a-c & 0\\ b & c & 0 & a-c\end{vmatrix}\\
\underset{\substack{L_1 \longleftarrow L_1 + L_3\\ L_2 \longleftarrow L_2 + L_4}}{=}\;& \begin{vmatrix} a+c & 2b & 0 & 0\\ 2b & a+c & 0 & 0\\ c & b & a-c & 0\\ b & c & 0 & a-c\end{vmatrix}\\
=\;& (a-c)^2\begin{vmatrix} a+c & 2b\\ 2b & a+c\end{vmatrix}\\
=\;& (a-c)^2\big((a+c)^2-(2b)^2\big)\\
=\;& (a-c)^2(a+c-2b)(a+c+2b).
\end{aligned}$$

b) En notant $s = a+b+c+d$ et C_1, C_2, C_3, C_4 les colonnes du déterminant proposé, on a :

$$S = \begin{pmatrix} b+c+d\\ c+d+a\\ d+a+b\\ a+b+c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-a\\ s-b\\ s-c\\ s-d\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = sC_1 - C_2.$$

Ainsi, les colonnes du déterminant proposé forment une famille liée, donc ce déterminant est nul.

c)

$$\begin{vmatrix} (1+x)^2 & (2+x)^2 & (3+x)^2 & (4+x)^2\\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2\\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2\\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2\end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{C_j \longleftarrow C_j - C_{j-1},\\ j=2,\,3,\,4}}{=} \begin{vmatrix} (1+x)^2 & 2x+3 & 2x+5 & 2x+7 \\ 2^2 & 5 & 7 & 9 \\ 3^2 & 7 & 9 & 11 \\ 6^2 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{C_j \longleftarrow C_j - C_{j-1},\\ j=3,\,4}}{=} \begin{vmatrix} (1+x)^2 & 2x+3 & 2 & 2 \\ 2^2 & 5 & 2 & 2 \\ 3^2 & 7 & 2 & 2 \\ 4^2 & 9 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

2.3

a) On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toutes $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$:

$$f(\alpha A + B) = (\alpha A + B)^\top = \alpha A^\top + B^\top = \alpha f(A) + f(B),$$

donc $f \in \mathcal{L}\big(\mathbf{M}_n(\mathbb{R})\big)$.

b) D'après le cours, les sev $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$, formés respectivement des matrices symétriques et des matrices antisymétriques, sont supplémentaires dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et :

$$\dim\big(\mathbf{S}_n(\mathbb{R})\big) = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \dim\big(\mathbf{A}_n(\mathbb{R})\big) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Il existe donc une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ formée successivement par une base de $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et une base de $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$. La matrice de f dans cette base est la matrice diagonale :

$$D = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$$

formée de $\dfrac{n(n+1)}{2}$ termes égaux à 1, suivis de $\dfrac{n(n-1)}{2}$ termes égaux à -1.

Il est clair alors que :

$$\operatorname{rg}(f) = n^2, \qquad \operatorname{tr}(f) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n,$$

$$\det(f) = 1^{\frac{n(n+1)}{2}}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

2.4

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \ldots & n \\ n & 2 & n & \ldots & n \\ n & n & 3 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \ldots & n \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$\underset{\substack{C_j \longleftarrow C_j - C_n,\\ j=1,\ldots,n-1}}{=} \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \ldots & 0 & n \\ 0 & 2-n & 0 & \ldots & 0 & n \\ 0 & 0 & 3-n & \ldots & 0 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= (1-n)(2-n)\cdots(-1)n = (-1)^{n-1}n!\,.$$

b)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \ldots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_i \longleftarrow L_i - L_1,\\ i=2,\ldots,n}}{=} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ 0 & a_1-x & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_2-x & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_{n-1}-x \end{vmatrix}$$

$$= a_1(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x).$$

c)

$$\det\left(a^{\operatorname{Max}(i,j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & \ldots & a^n \\ a^2 & a^2 & a^3 & \ldots & a^n \\ a^3 & a^3 & a^3 & \ldots & a^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & a^n & a^n & \ldots & a^n \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_i \longleftarrow L_i - L_{i+1},\\ i=1,\ldots,n-1}}{=} \begin{vmatrix} a-a^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & a^2-a^3 & \ldots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ldots & & a^{n-1}-a^n & 0 \\ & & & & a^n \end{vmatrix}$$

$$= (a-a^2)(a^2-a^3)\cdots(a^{n-1}-a^n)a^n$$

$$= \big(a(1-a)\big)\big(a^2(1-a)\big)\cdots\big(a^{n-1}(1-a)\big)a^n$$

$$= a^{1+2+\cdots+n}(1-a)^{n-1} = a^{\frac{n(n+1)}{2}}(1-a)^{n-1}.$$

d)

$$\begin{vmatrix} x+a_1 & a_1 & a_1 & \ldots & a_1 \\ a_2 & x+a_2 & a_2 & \ldots & a_2 \\ a_3 & a_3 & x+a_3 & \ldots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \ldots & x+a_n \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{C_j \longleftarrow C_j - C_1,\\ j=2,\ldots,n}}{=} \begin{vmatrix} x+a_1 & -x & -x & \ldots & -x \\ a_2 & x & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & 0 & x & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \ldots & x \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_1 \longleftarrow L_1 + (L_2+\cdots+L_n)}{=} \begin{vmatrix} x+a_1+\cdots+a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & x & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & 0 & x & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_n & 0 & \ldots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= x^{n-1}\Big(x + \sum_{i=1}^{n} a_i\Big).$$

e) Notons, pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, C_j la colonne numéro j du déterminant proposé. On a, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$C_j = \big(ij + i + j\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$$

$$= \big(i(j+1) + j\big)_{1\leqslant i\leqslant n} = (j+1)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} + j\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, C_j se décompose linéairement sur deux colonnes fixes (c'est-à-dire indépendantes de j).