ENSEIGNEMENT SUP MATH

Agrégation
Master

$$\pi = \frac{9801}{2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4}\frac{1103+26390n}{396^{4n}}}$$

Jean-Étienne Rombaldi

THÈMES POUR L'AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES

2e édition

edp sciences

ENSEIGNEMENT SUP MATH
Agrégation - Master

Jean-Étienne Rombaldi

$$\pi = \frac{9801}{2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4n)!}{\left(n!\right)^4} \frac{1103 + 26390n}{396^{4n}}}$$

Cette deuxième édition des « Thèmes pour l'agrégation de mathématiques » est corrigée et augmentée de trois chapitres.

Les problèmes corrigés qui la composent, destinés aux candidats à l'Agrégation interne de mathématiques, seront également utiles aux étudiants de licence et maîtrise de mathématiques ainsi qu'aux candidats à l'Agrégation externe. Les enseignants y trouveront également une source d'inspiration.
La préparation aux concours d'Agrégation (interne et externe) est essentiellement un travail de synthèse. C'est dans cette optique que l'ouvrage est agencé.
Pour chacune des trois parties qui constituent ce volume :
– topologie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
– systèmes différentiels ;
– polynômes orthogonaux et séries de Fourier ;
le plan de travail est identique. Tout d'abord, dans un chapitre d'introduction, on rappelle les définitions essentielles et on annonce les thèmes abordés avec des applications. Le chapitre suivant regroupe, sous forme de problème, des résultats classiques et importants qui seront utilisés dans les problèmes qui suivent. Ce chapitre peut être utilisé pour réviser des notions de base. Les chapitres suivants sont consacrés à quelques thèmes qui font souvent l'objet de problèmes de concours. On trouvera également des problèmes posés au concours d'Agrégation qui illustrent certaines notions introduites dans les problèmes précédents.

Jean-Étienne Rombaldi *est professeur agrégé de mathématiques, son dernier poste étant à l'institut Fourier de Grenoble (université Grenoble-Alpes). Il a longtemps été préparateur, à l'université et pour le compte du CNED, à l'agrégation interne et externe de mathématiques.*

ISBN : 978-2-7598-2340-6
9 782759 823406

edp sciences
www.edpsciences.org

Jean-Étienne ROMBALDI

Thèmes pour l'agrégation de mathématiques

2e édition

edp sciences

Dans la même collection

Éléments d'analyse réelle, 2e édition
Jean-Étienne Rombaldi
2019, ISBN : 978-2-7598-2339-0

Imprimé en France

ISBN (papier) : 978-2-7598-2340-6 - ISBN (ebook) : 978-2-7598-2393-2

Table des matières

Avant-propos

Ce recueil de problèmes corrigés destiné aux candidats à l'Agrégation interne et externe de Mathématiques sera également utile aux étudiants de licence et maîtrise de Mathématiques. Les enseignants y trouveront également une source d'inspiration.

La préparation aux concours d'Agrégation est essentiellement un travail de synthèse. C'est dans cette optique que l'ouvrage est agencé. Pour chacune des trois parties qui constituent ce volume, le plan de travail est identique.

Tout d'abord dans un chapitre d'introduction on rappelle les définitions essentielles et on annonce les thèmes abordés avec des applications. Dans une leçon d'oral le candidat ne peut pas se contenter d'énoncer seulement un théorème, il doit avoir réfléchi sur la nécessité des hypothèses et sur les applications. Ce chapitre sera, je l'espère, une aide à la conception d'un plan de leçon d'oral.

Le chapitre suivant regroupe sous forme de problème des résultats classiques et importants qui seront utilisés dans les problèmes qui suivent. Ce chapitre peut être utilisé pour réviser des notions de base.

Les chapitre suivants sont consacrés à quelques thèmes qui font souvent l'objet de problèmes de concours. On trouvera également des problèmes posés au concours d'Agrégation interne qui illustrent certaines notions introduites dans les problèmes précédents. Une façon efficace d'exploiter ces problèmes consiste évidemment à les rechercher et les rédiger de façon détaillée, puis à confronter les résultats aux solutions proposées.

La première partie est consacrée à l'étude de certaines propriétés algébriques et topologiques de l'algèbre des matrices carrées réelles ou complexes. Il peut servir à illustrer des leçons d'algèbre linéaire (utilisation de la réduction des endomorphismes) et de topologie (espaces vectoriels normés de dimension finie, problèmes de densité et de connexité). Elle se termine par deux épreuves d'agrégation interne.

La deuxième partie est consacrée à l'étude des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants ou non. Cette partie est une application importante à l'analyse de l'étude des sous espaces caractéristiques et de la réduction des endomorphismes. Cette partie se termine aussi par deux épreuves d'agrégation interne.

La troisième partie est consacrée à l'étude des polynômes orthogonaux. On y étudie tout d'abord les propriétés des espaces préhilbertiens (orthogonalisation de Gram-Schmidt, théorème de projection orthogonale, familles orthonormales totales et maximales). On s'intéresse ensuite aux polynômes orthogonaux avec des applications au calcul numérique de certaines intégrales (formules de quadrature de Gauss) et à la décomposition en séries de Fourier. On y étudie également les problèmes de Sturm-Liouville (opérateur de Fredholm et propriétés de compacité). Cette partie se termine par un problème inspiré d'une épreuve d'agrégation externe.

Je tiens enfin à remercier EDP Sciences pour la confiance qu'ils m'accordent en publiant une deuxième édition de ce travail.

Première partie

Topologie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Chapitre 1

Introduction

1.1 Notations et définitions

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou des complexes.

Pour tout entier $n > 0$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ à n lignes et n colonnes, $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe multiplicatif des matrices d'ordre n inversibles et pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$GL_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}$$

$$GL_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) < 0\}$$

Pour tous i, j compris entre 1 et n, on note E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i, j) qui vaut 1. La famille $\{E_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note I_n la matrice identité d'ordre n.

On appelle matrice de transvection toute matrice de la forme $I_n + \lambda E_{ij}$ avec $1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ et matrice de dilatation toute matrice de la forme $I_n + (\lambda - 1) E_{n,n}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A^* = {}^t\overline{A}$ désigne la matrice adjointe de A.

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice normale si $A^*A = AA^*$.

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice hermitienne si $A^* = A$.

On désigne par $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ le groupe multiplicatif des matrices complexes unitaires, c'est-à-dire telles que $A^*A = AA^* = I_n$.

On désigne par $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe multiplicatif des matrices réelles orthogonales, c'est-à-dire telles que ${}^tAA = A\,{}^tA = I_n$ et par $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ [resp. $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$] le sous ensemble de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices telles que $\det(A) = 1$ [resp. $\det(A) = -1$].

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on note $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E et I_d l'endomorphisme identité.

Le choix d'une base de E permet de réaliser un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour toute partie non vide X de E on désigne par $\mathrm{Vect}(X)$ le sous espace vectoriel de E engendré par X.

Un espace hermitien [resp. euclidien] est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel [resp. $\mathbb{R}$-espace vectoriel] de dimension finie E muni d'un produit scalaire hermitien [resp. euclidien], c'est-à-dire d'une forme sesquilinéaire [resp. bilinéaire] $(x, y) \mapsto \langle x \mid y \rangle$

(pour tout y dans E, $x \mapsto \langle x \mid y\rangle$ est linéaire et pour tout x dans E, $y \mapsto \langle x \mid y\rangle$ est semi-linéaire) hermitienne [resp. symétrique] ($\langle y \mid x\rangle = \overline{\langle x \mid y\rangle}$) définie positive ($\langle x \mid x\rangle \geq 0$ avec égalité si, et seulement si, $x=0$).-

L'adjoint de $u \in \mathcal{L}(E)$ est l'endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ \langle u(x) \mid y\rangle = \langle x \mid u^*(y)\rangle$$

Si A est la matrice de u dans une base orthonormée de E, la matrice de u^* dans cette base est alors A^* $[{}^tA$ dans le cas euclidien].

$\mathbb{C}^n$ est muni d'une structure hermitienne canonique avec le produit scalaire :

$$(u,v) \mapsto \langle u \mid v\rangle = \sum_{k=1}^{n} u_k \bar{v}_k$$

On dit qu'une matrice hermitienne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est positive si $\langle Ax \mid x\rangle \geq 0$ pour tout x dans $\mathbb{C}^n$.

L'ensemble des valeurs propres d'une matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est appelé le spectre de A et noté $\mathrm{Sp}(A)$. C'est une partie finie de $\mathbb{C}$ ayant au plus n éléments.

Le rayon spectral de A est défini par $\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

L'exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

Si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ sont deux polynômes non nuls dans $\mathbb{K}[X]$ avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$, on appelle alors matrice de Sylvester de P et Q la matrice du système de vecteurs $\{P, XP, \cdots, X^{m-1}P, Q, XQ, \cdots, X^{n-1}Q\}$ dans la base canonique de $\mathbb{K}_{n+m-1}[X]$. On note $S(P,Q)$ cette matrice, son déterminant est appelé le résultant de P et Q et est noté $\mathrm{Res}(P,Q)$.

1.2 Thèmes abordés dans cette partie

Avec les problèmes de cette partie, on aborde les thèmes et applications suivants.

- Tout endomorphisme normal d'un espace vectoriel hermitien se diagonalise dans une base orthonormée.
  - Diagonalisation des endomorphismes hermitiens ou unitaires.
  - Pour tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe deux matrices unitaires U, V et une matrice diagonale D à coefficients réels strictement positifs telles que $A = UDV^*$.
  - Pour toutes matrices hermitiennes positives A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $0 \leq \mathrm{Tr}(AB) \leq \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$.
  - Toute matrice hermitienne positive admet une unique racine carrée hermitienne positive.
  - Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique $A = \Omega S$, où Ω est une matrice orthogonale et S une matrice symétrique définie positive (décomposition polaire).

  - $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang r si, et seulement si, elle est équivalente à la matrice $A_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
  - Connexité de $GL_n(\mathbb{C})$ et de l'ensemble des matrices complexes de rang égal à r.
  - Pour A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, AB et BA ont même polynôme caractéristique.
- Réduction des endomorphismes orthogonaux.
  - Composantes connexes de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
- Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$ s'écrit $A = P_1 \cdots P_r \Delta Q_1 \cdots Q_s$, où $P_1, \cdots, P_r$, $Q_1, \cdots, Q_s$ sont des matrices de transvection et Δ est une matrice de dilatation.
  - Composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$.
- Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, x dans E, $I_x = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(u)(x) = 0\}$ est un idéal non réduit à $\{0\}$ de $\mathbb{C}[X]$. On note π_x le générateur unitaire de cet idéal. Il existe x dans E tel que $\pi_u = \pi_x$, où π_u est le polynôme minimal de u.
  - Etude de $F = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid P_A = \pi_A\}$, où P_A désigne le polynôme caractéristique de A.
- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans un compact K d'un espace vectoriel normé E est convergente si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence.
  - La décomposition polaire est un homéomorphisme.
- Deux polynômes non nuls P et Q dans $\mathbb{C}[X]$ ont une racine commune si, et seulement si, leur résultant est nul.
  - L'ensemble $\mathcal{D}'_n(\mathbb{C})$ formé des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- Calcul des normes matricielles induites par les normes vectorielles suivantes :

$$\begin{aligned} x &\mapsto \|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid 1 \le i \le n\} \\ x &\mapsto \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \\ x &\mapsto \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \end{aligned}$$

- pour toute norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a (en utilisant la décomposition de Dunford,) $\rho(A) = \lim_{k\to+\infty}\left(\left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}\right) = \inf_{k\ge1}\left(\left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}\right)$.

— Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}(\rho(A)<1) &\Leftrightarrow \left(\lim_{k\to+\infty} A^k = 0\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{k=0}^{+\infty} A^k = (I_n - A)^{-1}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\sum_{k=0}^{+\infty} Tr\left(A^k\right) = Tr\left((I_n - A)^{-1}\right)\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{k\to+\infty} Tr\left(A^k\right) = 0\right)\end{aligned}$$

— $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

  — La décomposition polaire est un homéomorphisme.

  — Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = \Omega S$, où Ω est une matrice orthogonale et S une matrice symétrique positive.

— $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

  — Pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, AB et BA ont même polynôme caractéristique.

  — Le centre de $GL_n(\mathbb{K})$ est formé des homothéties non nulles.

  — Les groupes multiplicatifs $GL_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ ne sont pas isomorphes.

  — Pour $n>1$, il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que l'on ait $\left\|P^{-1}AP\right\| = \|A\|$ pour tout A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout P dans $GL_n(\mathbb{K})$.

  — Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = \Omega S$, où Ω est une matrice orthogonale et S une matrice symétrique positive.

— $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

  — Pour tout $r \in \{0, 1, \cdots, n\}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r est connexe par arcs.

— Composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$.

  — Pour tout $r \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r est connexe par arcs.

— Composantes connexes de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

— Intérieur de l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

— $\mathcal{D}'_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ sont denses dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

  — Théorème de Cayley-Hamilton.

  — $\det\left(e^M\right) = e^{Tr(M)}$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

  — Si $\mathcal{C}(A)$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent à la matrice A, on a alors $\dim(\mathcal{C}(A)) \geq n$.

  — L'application qui associe à une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son polynôme minimal n'est pas continue.

— L'adhérence de l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Chapitre 2

Résultats préliminaires

Problème 2.

1. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé et* $u : E \times E \to E$ *une application bilinéaire. Montrer que* u *est continue si, et seulement si, il existe une constante strictement positive* λ *telle que* $\|u(x,y)\| \leq \lambda \|x\| \|y\|$ *pour tous* x, y *dans* E.
2. *Montrer que les valeurs propres d'une matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *hermitienne positive [resp.* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *symétrique réelles] sont réelles positives.*
3. *Montrer que les valeurs propres d'une matrice* $A \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ *sont de module égal à* 1.
4. *Soient* E *un espace vectoriel hermitien de dimension* $n > 0$ *et* $u \in \mathcal{L}(E)$ *un endomorphisme normal (*$u^* \circ u = u \circ u^*$*). Pour toute valeur propre de* u, $\lambda \in \mathbb{C}$, *on note* $E_\lambda = \ker(u - \lambda I_d)$ *le sous espace propre associé.*
   (a) *Montrer que* E_λ *est stable par* u^*.
   (b) *Montrer que* $E_\lambda^\perp$ *est stable par* u *et par* u^*.
   (c) *Montrer que* u *se diagonalise dans une base orthonormée.*
5. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *une matrice normale. Montrer qu'il existe une matrice unitaire* $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ *telle que* U^*AU *soit une matrice diagonale.*
6. *Soit* $A \in GL_n(\mathbb{C})$, *montrer qu'il existe deux matrices unitaires* U, V *et une matrice diagonale* D *à coefficients réels strictement positifs telles que* $A = UDV^*$.
7. *Soient* A *et* B *deux matrices hermitiennes positives dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Montrer que* $0 \leq \operatorname{Tr}(AB) \leq \operatorname{Tr}(A)\operatorname{Tr}(B)$ *(on peut d'abord considérer le cas où la matrice* A *est diagonale).*
8. *Montrer qu'une matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est de rang* r *si, et seulement si, elle est équivalente à* $A_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *où* I_r *désigne la matrice identité d'ordre* r.
9. *Soient* E *un espace vectoriel euclidien de dimension* $n > 1$ *et* $u \in \mathcal{L}(E)$ *un endomorphisme orthogonal (*$u^* \circ u = I_d$*).*

(a) *Montrer qu'il existe un sous espace vectoriel $P \neq \{0\}$ de E de dimension inférieure ou égale à 2 stable par u.*

(b) *Montrer qu'il existe des sous espaces vectoriels de E, $P_1, \cdots, P_r$, de dimension inférieure ou égale à 2, deux à deux orthogonaux et stables par u tels que $E = \bigoplus_{j=1}^{r} P_j$.*

(c) *Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est de la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & R_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R_r \end{pmatrix}$$

où, pour tout $k \in \{1, \cdots, r\}$, $R_k = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix}$ avec $\theta_k \in]0, 2\pi[- \{\pi\}$.

10. *Montrer que pour toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$ il existe des matrices de transvection $P_1, \cdots, P_r$ et $Q_1, \cdots, Q_s$ telles que :*

$$A = P_1 \cdots P_r \Delta Q_1 \cdots Q_s, \text{ où } \Delta = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \det(A) \end{pmatrix}$$

11. *Soient E un espace vectoriel de dimension $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On désigne par π_u le polynôme minimal (unitaire) de u.*

(a) *En notant $I_x = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(u)(x) = 0\}$ pour tout $x \in E$, montrer que I_x est un idéal non réduit à $\{0\}$ de $\mathbb{C}[X]$. On note π_x le générateur unitaire de cet idéal. Montrer que π_x divise π_u.*

(b) *Montrer qu'il existe un hyperplan de E stable par u.*

(c) *Soient $h \neq y$ dans E.*

i. *Montrer qu'il existe $\lambda \neq \mu$ dans $\mathbb{C}$ tels que $\pi_{h+\lambda y} = \pi_{h+\mu y}$. On note $P = \pi_{h+\lambda y}$.*

ii. *Montrer que $P(u)(y) = 0$ et $P(u)(h) = 0$ où P est le polynôme défini en 11(c)i.*

(d) *Montrer qu'il existe x dans E tel que $\pi_u = \pi_x$.*

12. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne positive. Montrer qu'il existe une unique matrice hermitienne positive B telle que $A = B^2$ (pour l'unicité, on peut montrer que B est polynomiale en A en utilisant un polynôme d'interpolation de Lagrange).*

13. *Montrer que toute matrice* $A \in GL_n(\mathbb{R})$ *peut s'écrire de manière unique* $A = \Omega S$, *où* Ω *est une matrice orthogonale et* S *une matrice symétrique réelle définie positive. Cette décomposition de la matrice* A *est appelée décomposition polaire.*
14. *Soient* $\theta_1, \cdots, \theta_p$ *des réels deux à distincts dans* $[0, 2\pi[$ *et* $a_1, \cdots, a_p$ *des réels. On définit la suite* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *par* $u_k = \sum_{j=1}^{p} a_j e^{ik\theta_j}$. *Montrer que si* $\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$, *tous les* a_j $(1 \leq j \leq p)$ *sont alors nuls (on peut utiliser la série de terme général* $u_k z^k$*).*
15. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs dans un compact* K *d'un espace vectoriel normé* E. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence.*
16. *Soient* P *et* Q *deux polynômes non nuls dans* $\mathbb{C}[X]$.
    (a) *Montrer que* P *et* Q *ont une racine complexe commune si, et seulement si, il existe deux polynômes non nuls* U *et* V *tels que* $\deg(U) < \deg(Q)$, $\deg(V) < \deg(P)$ *et* $UP + VQ = 0$.
    (b) *Montrer que* P *et* Q *ont une racine commune dans* $\mathbb{C}$ *si, et seulement si,* $\operatorname{Res}(P, Q) = 0$.

Solution.

1. L'espace vectoriel produit $E \times E$ est muni de la norme :

$$(x, y) \mapsto \|(x, y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

Si l'application u est bilinéaire et continue, on a alors $u(0,0) = 0$ et u est continue en $(0,0)$. Il existe donc un réel $\eta > 0$ tel que :

$$(x, y) \in E \times E, \|x\| \leq \eta, \|y\| \leq \eta \Rightarrow \|u(x, y)\| \leq 1$$

Pour x, y dans $E \setminus \{0\}$, on a $\left\|\frac{\eta}{\|x\|}x\right\| = \left\|\frac{\eta}{\|y\|}y\right\| = \eta$, $\left\|u\left(\frac{\eta}{\|x\|}x, \frac{\eta}{\|y\|}y\right)\right\| \leq 1$, donc avec la bilinéarité de u, on déduit que :

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ \|u(x, y)\| \leq \lambda \|x\| \|y\| \tag{2.1}$$

où $\lambda = \frac{1}{\eta^2}$. Réciproquement supposons (2.1) vérifié. Pour x_0, x, y_0 et y dans E, on a :

$$\begin{aligned}\|u(x, y) - u(x_0, y_0)\| &= \|u(x - x_0, y) + u(x_0, y - y_0)\| \\ &\leq \|u(x - x_0, y)\| + \|u(x_0, y - y_0)\| \\ &\leq \lambda(\|x - x_0\| \|y\| + \|x_0\| \|y - y_0\|)\end{aligned}$$

ce qui entraîne $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0)$ et la continuité de u sur $E \times E$.

2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne [resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique réelles], $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. On a :

$$\lambda \|x\|_2^2 = \langle Ax \mid x\rangle = \langle x \mid A^* x\rangle = \langle x \mid Ax\rangle = \bar{\lambda} \|x\|_2^2$$

donc $\lambda = \bar{\lambda}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si de plus A est positive, de $\lambda \|x\|_2^2 = \langle Ax \mid x\rangle \geq 0$, on déduit alors que $\lambda \geq 0$.

3. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. On a :

$$|\lambda|^2 \|x\|_2^2 = \|Ax\|_2^2 = \langle Ax \mid Ax\rangle = \langle x \mid A^* Ax\rangle = \|x\|_2^2$$

et nécessairement $|\lambda| = 1$.

4.

(a) Pour tout $x \in E_\lambda$, on a pour u est normal :

$$u(u^*(x)) = u^*(u(x)) = u^*(\lambda x) = \lambda u^*(x)$$

et $u^*(x) \in E_\lambda$, c'est-à-dire que E_λ est stable par u^*.

(b) Soient $x \in E_\lambda^\perp$ et $y \in E_\lambda$. Si u est normal, on a alors $u^*(y) \in E_\lambda$ et :

$$\langle u(x) \mid y\rangle = \langle x \mid u^*(y)\rangle = 0$$

c'est-à-dire que $u(x) \in E_\lambda^\perp$ et $E_\lambda^\perp$ est stable par u. En écrivant que :

$$\langle u^*(x) \mid y\rangle = \langle x \mid u(y)\rangle = \langle x \mid \lambda y\rangle = \bar{\lambda} \langle x \mid y\rangle = 0$$

on déduit que $u^*(x) \in E_\lambda^\perp$ et $E_\lambda^\perp$ est stable par u^*.

Remarque 2.1 *La stabilité de $E_\lambda^\perp$ par u^* est en fait vraie pour tout u dans $\mathcal{L}(E)$.*

(c) On raisonne par récurrence sur la dimension n de l'espace vectoriel hermitien E. Pour $n = 1$ le résultat est évident. Supposons le acquis pour tout endomorphisme normal d'un espace vectoriel hermitien de dimension $p \in \{1, \cdots, n-1\}$. Soient λ une valeur propre de u et E_λ l'espace propre associé. Si $E_\lambda = E$, u est alors une homothétie et toute base orthonormée de E convient. Si $E_\lambda \neq E$, $E_\lambda^\perp$ est alors de dimension $p \in \{1, \cdots, n-1\}$ et la restriction v de u à $E_\lambda^\perp$ est un endomorphisme normal de $E_\lambda^\perp$. Il existe donc une base orthonormée de $E_\lambda^\perp$ formée de vecteurs propres de v, donc de u. En complétant cette base par une base orthonormée de E_λ on obtient une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u.

Remarque 2.2 *Un endomorphisme hermitien [resp. unitaire] étant normal on déduit de ce qui précède que tout endomorphisme hermitien [resp. unitaire] a ses valeurs propres réelles [resp. de module 1] et se diagonalise dans une base orthonormée.*

5. On munit $\mathbb{C}^n$ de sa structure hermitienne canonique et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définit dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ un endomorphisme normal u qui se diagonalise dans une base orthonormée $(e_1, \cdots, e_n)$. La matrice de passage U de la base canonique à $(e_1, \cdots, e_n)$ est alors unitaire. En effet, les colonnes de U sont formées des composantes des vecteurs e_j dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et le coefficient d'indice (i, j) de U^*U est donné par :
$$v_{ij} = \begin{pmatrix} \overline{u}_{1i} & \cdots & \overline{u}_{ni} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1j} \\ \vdots \\ u_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \overline{u}_{ki} u_{kj} = \langle e_j \mid e_i \rangle = \delta_{ij}$$
Donc U^*AU est diagonale.
6. La matrice A^*A étant hermitienne définie positive ($\langle A^*Ax \mid x\rangle = \|Ax\|_2^2 > 0$ pour x non nul), il existe une matrice unitaire V telle que $V^*(A^*A)V = \Delta$ où :
$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$
avec $\lambda_i \in \mathbb{R}^{+,*}$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$. En notant $W = AV$, on a $W^*W = D^2$, où :
$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & . & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$
et avec $U^*U = D^{-1}W^*WD^{-1} = D^{-1}D^2D^{-1} = I_n$, on déduit que la matrice $U = WD^{-1}$ est unitaire. Ce qui donne $U^*AV = D^{-1}W^*W = D^{-1}D^2 = D$, avec D diagonale à coefficients réels strictement positifs.
7. On remarque tout d'abord que si $(e_1, \cdots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on a alors pour toute matrice $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $a_{ij} = \langle Ae_j \mid e_i\rangle$ pour $1 \leq i, j \leq n$. Dans la cas particulier où A est hermitienne positive on a $a_{ii} = \langle Ae_i \mid e_i\rangle \geq 0$ pour $1 \leq i \leq n$. Pour A diagonale hermitienne positive, on a :
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & . & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$
avec $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$ pour tout i. Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne positive, on a $b_{ii} \geq 0$ pour tout i et :
$$0 \leq \mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{ii} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ii}\right) = \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$$
Dans le cas général, on sait que, si A est hermitienne positive, toutes les valeurs propres de A sont alors réelles positives et il existe une matrice unitaire U telle

que :

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & . & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} U^* = UDU^*$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$ pour tout i. En remarquant que $AB = UDU^*B = U(DU^*BU)U^*$ est semblable à $D(U^*BU) = DC$, on a $Tr(AB) = Tr(DC)$. Mais D est diagonale hermitienne positive et C hermitienne positive unitairement semblable à B. Donc :

$$\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(DC) \leq \operatorname{Tr}(D)\operatorname{Tr}(C) = \operatorname{Tr}(A)\operatorname{Tr}(B)$$

8. Soient $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ de rang r, de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, H un supplémentaire de $\ker(u)$ dans $\mathbb{K}^n$, donc de dimension r, $\mathcal{B}_1 = (e_i)_{1\leq i\leq r}$ une base de H et $\mathcal{B}_2$ une base de $\ker(u)$. Le système $u(\mathcal{B}_1) = \{u(e_1), \cdots, u(e_r)\}$ est alors libre dans $\mathbb{K}^n$ (si $\sum\limits_{k=1}^{r}\lambda_k u(e_k) = 0$, on a alors $\sum\limits_{k=1}^{r}\lambda_k e_k \in H \cap \ker(u) = \{0\}$ et tous les λ_k sont nuls du fait que $\mathcal{B}_1$ est libre) et il se complète en une base $\mathcal{B}' = (u(e_1), \cdots, u(e_r), f_{r+1}, \cdots, f_n)$ de $\mathbb{K}^n$. La matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}'$ a alors la forme indiquée. D'où le résultat. La réciproque est évidente.

Remarque 2.3 *De ce résultat, valable sur tout corps commutatif, on déduit que deux matrices sont équivalentes si, et seulement si, elles ont même rang et qu'une matrice a même rang que sa transposée. Deux matrices de même rang ne sont pas nécessairement semblables. Par exemple une matrice inversible distincte de la matrice identité est de rang n et n'est pas semblable à I_n.*

9.

(a) Le polynôme minimal de u, $\pi_u \in \mathbb{R}[X]$, se décompose en produit de facteurs irréductibles $\pi_u = \prod\limits_{k=1}^{r}\pi_k$ avec $\pi_k \in \mathbb{R}_2[X]$ pour tout k. Comme $\pi_u(u) = 0$, il existe au moins un indice k tel que $\pi_k(u)$ ne soit pas inversible. Le noyau de cet endomorphisme n'est donc pas réduit à $\{0\}$ et il existe un vecteur x non nul dans E tel que $\pi_k(u)(x) = 0$. En écrivant $\pi_k(X) = aX^2 + bX + c$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ et $a \in \{0,1\}$, on a $au^2(x) + bu(x) + cx = 0$ et $P = \operatorname{Vect}\{x, u(x)\}$ est un sous espace vectoriel de E non réduit à $\{0\}$ $(x \neq 0)$ stable par u.

Remarque 2.4 *On peut aussi remarquer que $v = u + u^*$ est symétrique, donc à valeurs propres réelles. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$ non nul tels que $v(x) = \lambda x$, c'est-à-dire $u(x) + u^*(x) = \lambda x$ et pour u orthogonal $u^2(x) + x = \lambda u(x)$. Là encore le sous espace vectoriel $P = \operatorname{Vect}\{x, u(x)\}$ convient. En fait la première méthode montre que le résultat est vrai pour tout endomorphisme sur un espace vectoriel réel.*

Index