Sandrine Fleurant
Cyril Fleurant

Bases de mathématiques pour la géologie et la géographie

Cours et exercices

DUNOD

Illustration de couverture © zlikovec – iStockphoto.com

5 rue Laromiguière, 75005 Paris
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-073891-5

Table des matières

AVANT-PROPOS

La géographie (qu'elle soit d'orientation physique ou humaine et sociale) et la géologie sont des sciences du complexe qui nécessitent des outils de quantification élaborés pour en comprendre les processus et les fondements.

Cet ouvrage est un manuel de cours et d'exercices corrigés permettant d'acquérir et de consolider les bases de mathématiques nécessaires à la géographie physique et à la géologie. L'esprit de ce manuel est d'entrer par des problématiques géographiques et géologiques concrètes pour étudier les outils mathématiques réellement utiles à ces disciplines.

Cet ouvrage est construit autour de la géographie et de la géologie : ce sont des situations-problèmes qui vont motiver la nécessité d'apports théoriques et pratiques mathématiques. Le cours est illustré d'exemples développés et issus de la géographie et de la géologie. Ce manuel part donc du vécu et des besoins des étudiants pour les accompagner dans leur construction d'outils mathématiques. Les apports théoriques mathématiques seront ceux réellement utiles à la construction d'une culture géographique ou géologique solide.

Une place est également faite aux applications numériques et à l'informatique. En effet, les auteurs souhaitent que le lien géographie-géologie-mathématiques soit le plus complet possible, aussi des outils informatiques (les gratuitiels R et Xcas) seront utilisés.

À QUI S'ADRESSE CET OUVRAGE ?

Cet ouvrage s'adresse principalement aux étudiants de première et deuxième année d'étude de géographie et de géologie (licence, classes préparatoires BCPST, école d'ingénieur) et à leurs enseignants, et bien sûr également au-delà (étudiants en licence 3 ou en master souhaitant un retour sur des bases de mathématiques).

Ces étudiants se répartissent entre deux grands profils de formation initiale aux mathématiques :

- les étudiants ayant suivi un cursus secondaire scientifique, avec une formation solide en mathématiques. Ces étudiants ont besoin de consolider leur connaissances mathématiques et surtout d'apprendre à utiliser ces connaissances dans des contextes non mathématiques, issus des disciplines étudiées.

- les étudiants ayant suivi un cursus moins scientifique, pour lesquels il est nécessaire de revenir sur les bases des mathématiques. Ces bases sont ici directement données dans le contexte de la géographie et de la géologie.

Cet ouvrage s'adresse aussi aux professeurs de l'enseignement secondaire (que ce soit en sciences ou en mathématiques), qui trouveront dans cet ouvrage de nombreuses pistes d'enseignement interdisciplinaire.

Pourquoi cet ouvrage ?

Les auteurs travaillent au quotidien au contact d'élèves, d'étudiants et de leurs enseignants. Le constat est fait des difficultés de nombreux étudiants à utiliser des connaissances mathématiques simples en contexte (tracer une droite, manipuler les unités, dériver une fonction). Il nous est apparu nécessaire de mettre l'accent sur ces besoins pour compléter les enseignements prévus à l'université et les ouvrages existants.

L'ouvrage reprend volontairement de très nombreuses notions et donne des conseils de méthode (comment effectuer des conversions, comment tracer une droite). Les fonctions mathématiques utiles sont abordées, avec des exemples contextualisés. L'ouvrage aborde aussi (toujours de manière très contextualisée) des notions plus fines, comme celles d'intégrale, d'équation différentielle et de dérivée partielle.

Un autre but est d'aider les lecteurs à acquérir une culture des ordres de grandeur et des unités ainsi que des réflexes de méthode de résolution et une meilleure confiance face aux données chiffrées.

Le contenu

L'ouvrage se décline en six chapitres qui amènent progressivement vers des notions de plus en plus avancées.

Le **chapitre 1 « Grandeurs et mesures »** s'intéresse aux systèmes de numération décimale et sexagésimale. Il présente les notions de symbole, de mesure, d'unité et de valeur approchée (arrondi, chiffres significatifs, incertitude, erreur), ainsi que les conversions d'unité, les pourcentages, les taux et les quotients. Il aborde également la notation scientifique et les puissances de dix.

Le **chapitre 2 « Variables et fonctions »** aborde les variables, leurs valeurs et les liens entre elles afin de définir la notion de fonction. On montre également l'intérêt de la représentation de ces fonctions pour illustrer des phénomènes naturels. Quelques fonctions usuelles en géographie et en géologie sont développées, ainsi que les notions de croissance, décroissance, minimum et maximum, utiles à l'étude de leurs évolutions et tendances.

Le **chapitre 3 « Trigonométrie, géométrie du plan et de l'espace »** développe les notions de trigonométrie du plan, de fonctions trigonométriques, et de géométrie du plan et de l'espace.

Le **chapitre 4 « Cartographie »** donne des bases de mathématiques permettant de comprendre la cartographie, notamment concernant le repérage sur le globe, les projections et la trigonométrie sphérique.

Le **chapitre 5 « Dérivation »** montre les apports de la dérivation pour l'étude des fonctions usuelles. Il s'agira de bien comprendre l'intérêt de la dérivation pour l'étude des variations d'une fonction. Des éléments de technique de calcul sont fournis, les calculs plus lourds pourront être effectués grâce à un logiciel de calcul formel.

Le **chapitre 6 « Intégration et équations différentielles »** expose deux outils fondamentaux liés aux fonctions : l'intégration et la notion d'équation différentielle. Est présentée également la notion d'équation aux dérivées partielles.

Chacun des chapitres propose **deux types d'exercices entièrement corrigés** :

- des exercices d'application mathématiques permettent la prise en main des éléments essentiels du cours et aident à leur mémorisation. Ils ne sont pas contextualisés, mais sont tout de même centrés sur les savoirs et savoir-faire qui seront effectivement utiles aux étudiants en géologie et en géographie ;
- des exercices d'application à la géographie et à la géologie dans lesquels on trouve des situations-problèmes. Ces exercices ont pour objectif de contextualiser les outils mathématiques dans des problématiques concrètes rencontrées par les étudiants.

Ces exercices (**plus de 110 au total**) sont pour la moitié contextualisés et tous corrigés.

Comment utiliser ce manuel ?

À chaque début de série d'exercices d'un chapitre, on trouve trois séries de **questions rapides**. Ces questions permettent au lecteur d'évaluer si le contenu du chapitre est connu et compris dans ses grandes lignes. Il faut d'abord essayer de répondre aux questions sans regarder le cours et utiliser celui-ci ensuite pour vérifier ou conforter les méthodes et calculs. Il ne s'agit pas de traiter toutes les séries à suivre.

En fonction de ses connaissances et de son envie, l'étudiant peut :

- commencer directement par une série de questions rapides (à titre de test diagnostique) puis aborder (ou non) le contenu du cours en fonction du résultat ;
- commencer par lire les points clés figurant en fin de chapitre pour évaluer la familiarité avec les contenus du cours puis décider de travailler d'abord le cours ou d'abord des exercices ;

- travailler d'abord le cours puis vérifier sa compréhension à l'aide des différents exercices ;
- démarrer directement par les exercices de géographie ou de géologie et se reporter au cours et aux exercices de mathématiques selon les besoins.

Un conseil général : pour les calculs à effectuer, commencer par chercher de tête un ordre de grandeur du résultat, puis avancer dans les calculs au maximum à la main et terminer à l'aide d'une calculatrice ou du logiciel de calcul R.

Les bonus web sur dunod.com

Tous les scripts R et Xcas de ce manuel, ainsi que les données nécessaires à certains exercices, peuvent être téléchargés sur www.dunod.com sur la page de présentation de l'ouvrage.

Bonne lecture !

Les auteurs souhaitent à chacun une bonne lecture de cet ouvrage. C'est une **lecture active** qui sera efficace : crayon en main, en cherchant à résoudre les exercices et en prenant le temps de rassembler ses connaissances personnelles avant de lire les corrigés.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier les relecteurs de cet ouvrage :

Arnaud Banos, géographie, directeur de recherche au CNRS, université Paris I Panthéon-Sorbonne

Arnaud Bodin, mathématiques, maître de conférences, université de Lille I

Stéphanie Bodin, mathématiques, professeure agrégée, lycée Baudelaire à Roubaix, académie de Lille

Olivier Bourgeois, géologie, professeur des universités, université de Nantes

Nathalie Corson, mathématiques, maître de conférences, université du Havre

Jean-Paul Doerane, mathématiques, maître de conférences, université de Lille I

Annick Tollis, mathématiques, professeure agrégée, lycée de Borda à Dax, académie de Bordeaux

Merci à Bernard Parisse et Renée De Graeve, maîtres de conférences, université de Grenoble, pour leur relecture et leurs commentaires sur la partie Xcas.

GRANDEURS ET MESURES

1

PLAN

OBJECTIFS

- ➤ Savoir manipuler les nombres, savoir passer d'une échelle à l'autre et manipuler différents ordres de grandeur.
- ➤ Être à l'aise avec les nombres et leur comparaison (0,1 < 0,2 mais –0,1 > –0,2) ainsi qu'avec la notation scientifique et sa signification (on doit voir immédiatement que 10^{-1} est plus grand que 10^{-2}).
- ➤ Pour les objets rencontrés fréquemment, connaître leurs unités et avoir des ordres de grandeurs de leur valeur.
- ➤ Savoir convertir les unités (réussir par exemple à convertir sans erreur des m^3 en cm^3, des m/s en cm/h).

En géographie comme en géologie, les données sont chiffrées, quantifiées (c'est-à-dire traduites en termes de grandeurs) et le besoin de manipuler des nombres est permanent. Ce chapitre s'intéresse aux systèmes de numération décimale et sexagésimale. Il présente les notions de symbole, de mesure, d'unité et de valeur approchée (arrondi, chiffres significatifs, incertitudes), ainsi que les conversions d'unité, les pourcentages, les taux et les quotients. Il aborde également la notation scientifique et les puissances de dix. Ces notions sont fondamentales en science appliquée.

1.1 Les nombres

1.1.1 Numération et nombres entiers

Un **système de numération** est un ensemble de symboles et de règles permettant d'écrire les nombres (c'est une manière de compter). On regroupe les symboles par paquets et la taille d'un paquet s'appelle la **base**.

Le système de numération usuel est en base 10 : les symboles usuels sont 0, 1, 2, 3, ..., 9. On donne un nom à dix **unités** (une **dizaine**, notée 10^1 ; lire : « 10 puissance 1 »), un nom à dix dizaines (une **centaine**, valant $100 = 10 \times 10$, notée 10^2), un nom à dix centaines (un **millier**, valant $1\,000 = 10 \times 10 \times 10$, noté 10^3), etc.

D'autres bases sont utilisées : la base 60 (pour les mesures de temps et d'angle) ou encore la base 2 dans laquelle les nombres s'écrivent uniquement avec des 0 et des 1. Cette dernière écriture a révolutionné le monde actuel puisqu'elle est la clé du fonctionnement des ordinateurs : 1, le courant passe ; 0, il ne passe pas (toutes les informations, codées en nombres, peuvent donc se traduire par un courant électrique et réciproquement).

1.1.2 La numération décimale

Le système de numération le plus souvent utilisé est le système de numération décimale de position (« décimal » pour « 10 », parce que nous avons 10 doigts). Deux éléments importants sont à retenir :

- Le **système décimal** utilise dix symboles de numération (les **chiffres**) : 0, 1, 2, ..., 9 ;
- Dans l'écriture d'un nombre, la position d'un chiffre indique une puissance de dix et le chiffre précise le nombre de fois que cette puissance intervient. Un zéro indique l'absence de puissance correspondant à cette position.

C'est ainsi que l'on décrit les nombres entiers positifs.

Par exemple, dans le nombre « 525 005 », le chiffre 5 prend trois valeurs différentes. En lisant de gauche à droite : le premier 5 prend la valeur « cinq cent mille », le deuxième 5 la valeur « cinq mille » et le troisième 5 la valeur « cinq unités »). On a ainsi :

$$525\,005 = 5 \times 100\,000 + 2 \times 10\,000 + 5 \times 1\,000 + 0 \times 100 + 0 \times 10 + 5 \times 1.$$

Le langage courant confond souvent les notions de chiffre et de nombre. En mathématiques, les chiffres sont les symboles utilisés pour écrire des nombres, de même que les lettres sont les symboles utilisés pour écrire des mots. Tout comme il existe des mots à une lettre (« y » dans la phrase « On y va »), il existe des nombres à un chiffre (« Victor a 3 ans »).

En associant aux nombres entiers (appelés **entiers naturels**) les signes + ou −, on décrit les **nombres entiers relatifs** (figure 1.1). Par exemple, le nombre −246 est plus petit que le nombre 37.

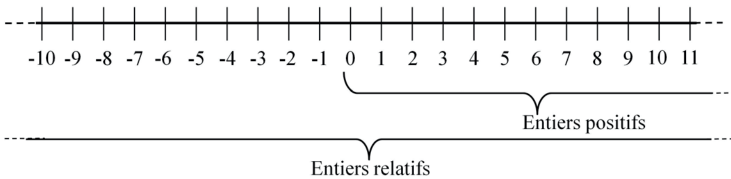


Figure 1.1– **L'ensemble des nombres entiers relatifs.**

L'ensemble des nombres entiers positifs (entiers naturels) est inclus dans celui des nombres entiers relatifs.

1.1.3 Puissances de 10 et nombres décimaux

Définition

Pour n entier positif, on définit 10^n par $\underbrace{10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{n \text{ fois}}$, avec la convention $10^0 = 1$ (voir tableau 1.1).

Tableau 1.1– **Notation scientifique *vs.* notation classique.**

Notation scientifique	Notation classique
10^n	$\underbrace{10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{n \text{ fois}}$
...	...
10^3	$10 \times 10 \times 10 = 1\,000$
10^2	$10 \times 10 = 100$
10^1	10
10^0	1
10^{-1}	0,1
10^{-2}	$0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01$
10^{-3}	$0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 \times = 0{,}001$
...	...
10^{-n}	$\underbrace{10^{-1} \times 10^{-1} \times \cdots \times 10^{-1}}_{n \text{ fois}}$

Remarque

10^n s'écrit avec un 1 suivi de n zéros.

Ainsi le nombre 525 005 de l'exemple précédent s'écrit (voir figure 1.2) :

$$525\,005 = 5 \times 10^5 + 2 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 5 \times 10^0.$$

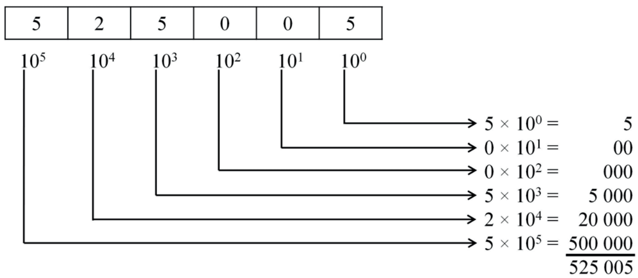


Figure 1.2 – **Principe de la décomposition des nombres en base 10.**

Définition

On définit 10^{-1} par $10^{-1} = \dfrac{1}{10^1}$. Ce nombre se lit « un dixième ».
Pour n entier positif, on définit 10^{-n} par $\underbrace{10^{-1} \times 10^{-1} \times \cdots \times 10^{-1}}_{n \text{ fois}}$, avec $10^0 = 10^{-0} = 1$ (tableau 1.1).

Remarque

10^{-n} s'écrit 0,0...01 avec n zéros : un zéro avant la virgule (position des unités) et $n - 1$ zéros après.

Un **dixième** correspond à une partie de l'unité partagée en dix parties égales, un **centième** à une partie de l'unité partagée en cent parties égales (voir figure 1.3). Le nombre 7×10^{-5} est donc plus petit que le nombre 2×10^{-4}. Grâce aux dixièmes (10^{-1} noté aussi 0,1), aux centièmes (10^{-2} ou 0,01), etc., on peut décrire les **nombres décimaux**.

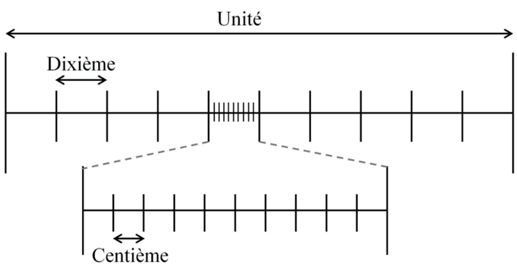


Figure 1.3 – **La subdivision décimale.**

Chaque intervalle se découpe en 10 autres intervalles et ainsi de suite.

Par exemple, dans le nombre « 323 003,03 », le chiffre 3 prend quatre valeurs différentes, de gauche à droite : la valeur « trois cent mille » pour le premier 3, la valeur « trois mille » pour le deuxième 3, la valeur « trois unités » pour le troisième et la valeur « trois centièmes » pour le dernier. On a : $323\,003{,}03 = 3 \times 10^5 + 2 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 0 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2}$ (voir figure 1.4).

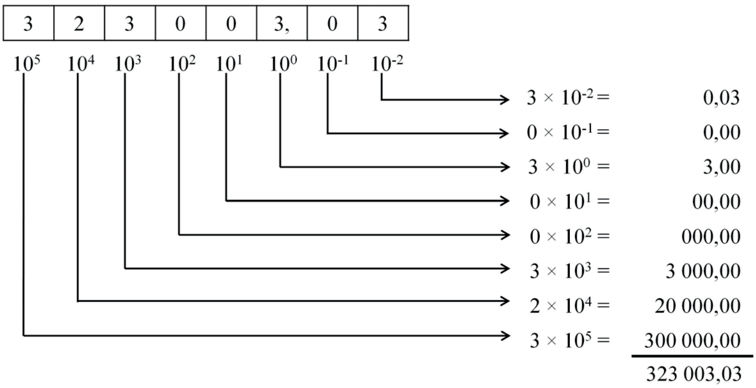


Figure 1.4 – **Décomposition du nombre 323 003,03 en base 10.**

Un nombre à virgule s'écrit dans la notation française avec une virgule (7,2 par exemple) et dans la notation anglo-saxonne avec un point (7,2 s'écrit 7.2). On notera que les Anglo-saxons utilisent la virgule pour séparer les milliers. Par exemple, 2 589 348 ans s'écrira *2,589,348 years*. Dans cet ouvrage, on utilise la notation française, mais la plupart des logiciels utilisent quant à eux la notation anglo-saxonne.

En associant à ces nombres décimaux les signes + ou −, on décrit les **nombres décimaux relatifs**. Par exemple, le nombre −0,03 est un nombre décimal négatif plus grand que le nombre $-1{,}2$.

1.1.4 Ensemble de nombres

Tous les nombres entiers positifs sont des nombres entiers relatifs (voir figures 1.1 et 1.5). Tous les nombres entiers relatifs sont des nombres décimaux relatifs. En effet, 4 peut s'écrire 4,0. Il existe d'autres types de nombres comme les **nombres rationnels**, qui peuvent s'écrire comme quotient de deux nombres entiers : $-\frac{1}{3}$ par exemple. Tous les nombres décimaux sont des nombres rationnels : $-3 \times 10^{-1} - 2 \times 10^{-2} = -\frac{32}{100}$. Il existe aussi les **nombres réels**, qui peuvent être rationnels ou non rationnels (on dit également irrationnels). Par exemple, π et $\sqrt{2}$ sont irrationnels.

TRIGONOMÉTRIE, GÉOMÉTRIE DU PLAN ET DE L'ESPACE

3

PLAN

OBJECTIFS

- ➤ Savoir calculer des longueurs et des angles dans le plan grâce à la trigonométrie et aux théorèmes de Pythagore et de Thalès.
- ➤ Connaître les fonctions trigonométriques (sinus, cosinus et tangente) et leurs propriétés.
- ➤ En géométrie dans l'espace, calculer une longueur à partir des coordonnées cartésiennes et avoir des notions sur les coordonnées sphériques d'un point.

En géographie et en géologie, le recours à des considérations géométriques est fréquent, que ce soit dans le plan ou dans l'espace. L'usage des angles est particulièrement important et conduit à utiliser des notions de trigonométrie ainsi que les fonctions cosinus, sinus et tangente.

Ces outils jouent un rôle fondamental en cartographie, qui fera l'objet du chapitre 4.

3.1 LES MESURES D'ANGLE

Trois unités d'angle sont utilisées principalement (tableau 3.1) : le degré, le radian (unité mathématique) et le grade (unité officielle de l'IGN, Institut géographique national). Ces unités d'angle ne sont pas des dimensions au sens physique.

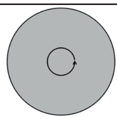
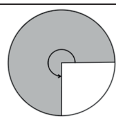
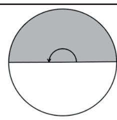
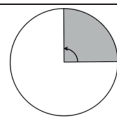
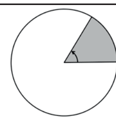
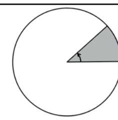
Définitions

- Le **radian**, noté « rad », vérifie qu'un tour complet d'un cercle vaut 2π radians (et un demi-tour π radians).
- Pour le **degré**, noté « ° », un tour complet vaut 360 degrés. Comme pour les heures, on utilise les degrés décimaux ou le système sexagésimal avec les sous-

multiples : minutes d'angle (notées « $'$ ») et secondes d'angle (notées « $''$ »). On a $1° = 60' = 3\,600''$.

- Pour le **grade**, noté « gr », un tour complet vaut 400 grades. C'est une unité décimale, avec les sous-multiples classiques : décigrade (dgr), centigrade (cgr)…

Tableau 3.1– Récapitulatif des différentes unités d'angle et certaines valeurs particulières.

Unité						
Degré (°)	360	270	180	90	60	45
Radian (rad)	2π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$
Grade (gr)	400	300	200	100	66,7	50

Exemple

Un angle de $72{,}53°$ vaut $72°\ 0{,}53 \times 60' = 72°\ 31{,}8' = 72°\ 31'\ 0{,}8 \times 60'' = 72°\ 31'\ 48''$.

À l'inverse, un angle de $34°\ 13'\ 15''$ vaut $(34 + 13/60 + 15/3\,600)° \simeq 34{,}22°$.

3.2 Géométrie du plan (partie 1) : trigonométrie, pente

Dans ce paragraphe, on se place dans le plan (c'est-à-dire sur une surface plane – mais pas forcément horizontale – ou considérée comme telle). Les notions abordées sont non seulement essentielles en cartographie, mais également dans bien d'autres domaines de la géographie et de la géologie : elles permettent le repérage et la description de ce qui est observé dans un plan. Les grandeurs utilisées dans ce paragraphe seront les longueurs et les angles.

3.2.1 Calcul de longueurs et d'angles dans un triangle rectangle

On se place dans un triangle ABC rectangle au point B (figure 3.1). Plusieurs propriétés permettent de calculer des longueurs dans ce triangle.

Si on connaît deux des trois longueurs, on peut obtenir la troisième grâce au théorème de Pythagore :

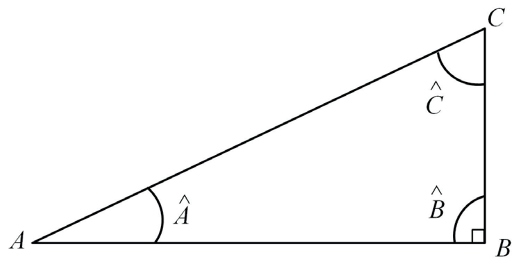


Figure 3.1 – Triangle rectangle en B.

Théorème de Pythagore

Dans le triangle ABC rectangle en B, on a l'égalité entre les longueurs AB, AC et BC donnée par : $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Exemple

Sur la figure 3.2, on sait que $DA = 1\,552$ m, que $DH = 1\,500$ m et que DHA est un triangle rectangle en H. On a donc la relation : $AH^2 + DH^2 = DA^2$, soit $AH^2 = 1\,552^2 - 1\,500^2 = 158\,704$. Et enfin, $AH = \sqrt{158\,704} \simeq 398$ m.

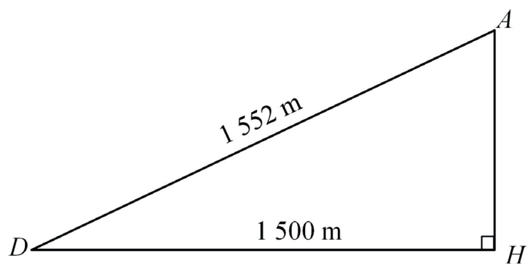


Figure 3.2 – Triangle rectangle en H, la figure n'est pas à l'échelle.

Grâce à la trigonométrie, si on connaît une longueur et un angle, on peut obtenir une deuxième longueur. Si on connaît deux longueurs, on peut obtenir un angle.

Propriété (trigonométrie)

Dans un triangle rectangle, les quotients (rapports) de deux longueurs s'expriment en fonction d'un angle (figure 3.1) grâce aux fonctions cosinus, sinus ou tangente :

$$\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC}$$
$$\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC}$$
$$\tan \hat{A} = \frac{BC}{AB}$$

Remarques

- Comme ce sont des rapports de longueurs, les valeurs des fonctions trigonométriques sont sans dimension (pas d'unité).
- À partir de la relation $\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC}$, on en déduit que $\hat{A} = \sin^{-1}\left(\frac{BC}{AC}\right)$ où $\sin^{-1}$ est la fonction réciproque de sinus, appelée aussi $\arcsin$. De même, on peut utiliser les fonctions réciproques de cosinus (notée $\cos^{-1}$ ou $\arccos$) et tangente (notée $\tan^{-1}$ ou $\arctan$).

  Ne pas confondre la fonction réciproque $\sin^{-1}$ avec l'inverse $\frac{1}{\sin}$.
- Penser à paramétrer l'outil de calcul avec la mesure d'angle utilisée (degré ou radian ou grade).

Exemple

Dans un prisme d'accrétion ou orogénique, h est connue et on cherche d (figure 3.3). On partage le triangle en deux triangles rectangles identiques, dont l'un des côtés mesure h et l'autre $d/2$. Dans les triangles rectangles, en utilisant l'angle de 45°, on obtient $\tan(45°) = \frac{h}{d/2}$ et donc on a : $d = 2h$ puisque $\tan(45°) = 1$.
D'autres situations autour du prisme d'accrétion seront présentées en exercice.

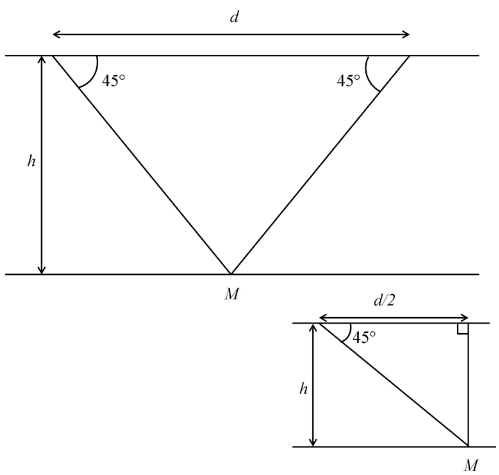


Figure 3.3 – Schématisation d'un prisme d'accrétion.

3.2.2 Calcul de la distance entre deux points dans un repère

Propriété Calcul de la distance entre deux points

On se donne deux points A et B de coordonnées respectives $(x_A \,;\, y_A)$ et $(x_B \,;\, y_B)$ dans un repère orthonormal du plan (c'est-à-dire un repère dont les axes sont perpendiculaires et gradués avec la même échelle). Alors la distance entre les points A et B vaut (figure 3.4) :

$$d(A,B) = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

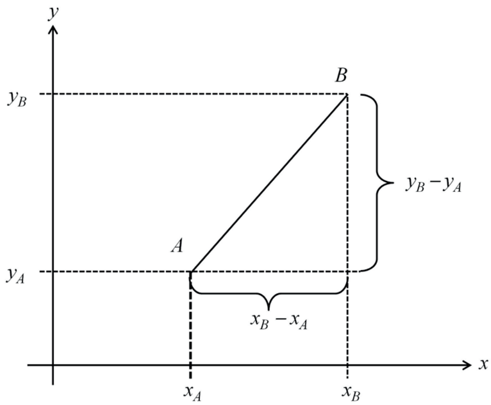


Figure 3.4 – **Principe du calcul de la distance entre deux points A et B de coordonnées respectives $(x_A\ ;\ y_A)$ et $(x_B\ ;\ y_B)$.**

Exemple

Pour définir l'erreur de positionnement d'un point P sur une carte, on calcule la distance entre le point réel et le point sur la carte. On note δx_P l'erreur en x : $\delta x_P = x_{\text{carte}} - x_{\text{réel}}$ et δy_P l'erreur en y : $\delta y_P = y_{\text{carte}} - y_{\text{réel}}$. Ces erreurs peuvent être positives ou négatives. L'erreur de positionnement en P vaut alors (figure 3.5) :

$$\Delta_P = \sqrt{(\delta x_P)^2 + (\delta y_P)^2}$$

Δ_P est un nombre toujours positif.

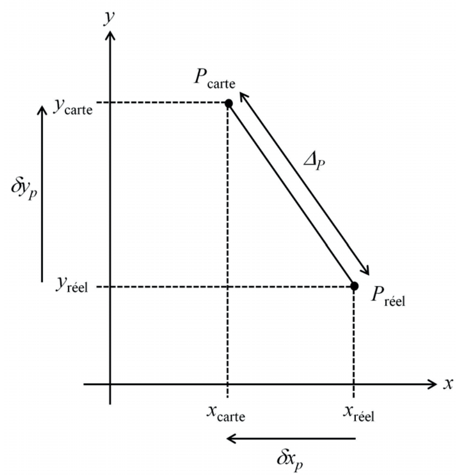


Figure 3.5 – **Principe du calcul de l'erreur de positionnement d'un point sur une carte.**

6 INTÉGRATION ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

PLAN

OBJECTIFS

- Comprendre le lien entre aire du domaine sous une courbe et intégration.
- Connaître le lien entre primitive d'une fonction et intégrale.
- Savoir calculer des intégrales à la main et à l'aide d'un logiciel de calcul formel.
- Comprendre la méthode des rectangles pour le calcul approché d'une intégrale.
- Reconnaître une équation différentielle, la fonction inconnue et la variable.
- Résoudre à la main quelques équations différentielles ordinaires simples.
- Savoir utiliser Xcas pour résoudre des équations différentielles.
- Reconnaître une équation aux dérivées partielles.

Ce chapitre s'intéresse à deux outils fondamentaux liés aux fonctions, qui sont utilisés fréquemment en géologie et géographie : l'intégration et la notion d'équation différentielle. Les équations aux dérivées partielles sont présentées très rapidement pour signaler au lecteur leur existence mais leur étude dépasse le cadre de ce chapitre et de cet ouvrage.

On sait calculer l'aire de formes géométriques usuelles (par exemple l'aire d'un rectangle) mais comment calculer l'aire du domaine limité par une courbe plus complexe ? On va utiliser l'outil intégration.

Quand on s'intéresse aux variations d'une grandeur dans le temps et dans l'espace (ce qui arrive fréquemment en géographie et en géologie), il est souvent utile de faire appel à un type particulier de fonctions : les solutions d'équations différentielles et d'équations aux dérivées partielles. On a déjà abordé la notion d'équation. Qu'est-ce qu'une équation différentielle ? Que signifie « résoudre une telle équation » et comment fait-on ?

6.1 Intégrales : introduction, valeur moyenne

Le volume d'un liquide qui s'écoule avec un débit constant connu peut être calculé par la formule : $V = Q \times t$ où V est le volume cherché, Q le débit du liquide et t la durée d'observation.

Dans l'expression ci-dessus, on a considéré le débit comme constant tout au long de la durée t d'observation. Si le débit est Q_1 pendant la durée t_1 puis Q_2 pendant la durée t_2, le volume V s'obtient par (figure 6.1) : $V = Q_1 \times t_1 + Q_2 \times t_2$.

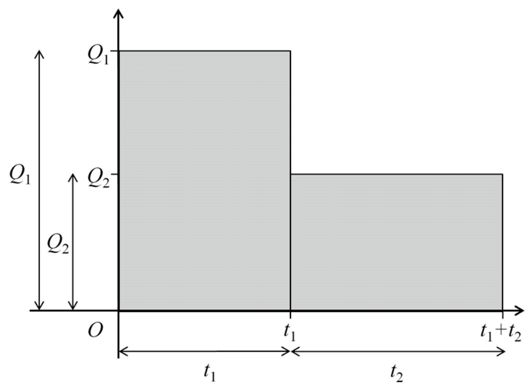


Figure 6.1 – $Q(t) = Q_1$ pour $0 \leq t \leq t_1$ et $Q(t) = Q_2$ pour $t_1 < t \leq t_1 + t_2$.

Dans la réalité, le débit Q peut varier continûment et s'exprime alors par une fonction du temps $Q(t)$. Comment calculer alors le volume qui s'est écoulé pendant un intervalle de temps donné ?

Pour cela, revenons à la situation précédente avec les débits Q_1 et Q_2. La fonction $Q(t)$ vaut Q_1 sur une durée t_1 (par exemple de 0 à t_1) et Q_2 sur une durée t_2 (par exemple de t_1 à $t_1 + t_2$).

La quantité $Q_1 \times t_1$ correspond à l'aire du premier rectangle et $Q_2 \times t_2$ à l'aire du second rectangle. Au final, le volume V entre les instants 0 et $t_1 + t_2$ est représenté par la somme des aires des deux rectangles, ce qui correspond à **l'aire sous la courbe** représentative de Q (parties grisées sur la figure 6.1).

C'est cette idée que nous allons essayer de retrouver dans le cas d'une fonction Q définie en fonction de t sur l'intervalle $[0 ; T]$. Prenons par exemple l'expression du débit d'un bassin versant $Q(t) = \dfrac{3t^2}{80\,000} \exp\left(-\dfrac{t}{200}\right)$ où la durée t est exprimée en secondes et le débit Q en m^3/s sur une période $T = 5$ min $= 300$ s. La représentation graphique de la fonction Q sur l'intervalle $[0 ; 300]$ est donnée par la figure 6.2.

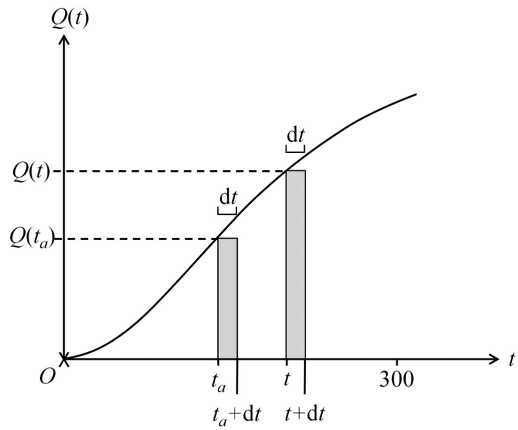


Figure 6.2 – **Graphe de la fonction débit sur** $[0\ ;\ 300]$, $Q : t \mapsto \dfrac{3t^2}{80\,000}\exp\left(-\dfrac{t}{200}\right)$.

Quels rectangles introduire pour calculer ensuite la somme des aires ? Pour la hauteur : elle est donnée par les différentes valeurs $Q(t)$. On va prendre une largeur infiniment petite dt et « l'aire » du rectangle correspondant sera $Q(t) \times \mathrm{d}t$, notée encore $Q(t)\mathrm{d}t$ (on fait le choix ici des rectangles situés en-dessous de la courbe représentative de Q).

Il s'agit maintenant d'additionner les aires de tous ces rectangles. Il y en a une infinité. Pour calculer une telle somme d'aires infinitésimales d'un nombre infini de rectangles, on utilise l'outil mathématique « **intégrale de la fonction** Q » entre les **bornes** 0 et T (figure 6.3) :

$$V = \int_0^T Q(t)\mathrm{d}t$$

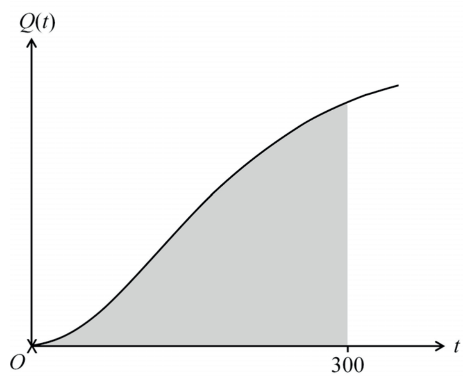


Figure 6.3 – **Aire sous la courbe représentative de** Q.

Remarque

Le symbole $\int$ est d'un S allongé, S comme « somme ».

On verra dans les paragraphes suivants comment calculer une intégrale. Pour l'exemple donné, on trouve :

$$\int_0^{300} Q(t)\mathrm{d}t = \int_0^{300} \frac{3t^2}{80\,000} \exp\left(-\frac{t}{200}\right)\mathrm{d}t$$
$$\simeq 115 \text{ m}^3$$

Remarque

Dans l'exemple ci-dessus, on s'est placé dans le cadre d'une fonction définie sur un intervalle borné (les bornes sont des nombres finis). Dans d'autres situations, on peut tout à fait être amené à devoir considérer l'aire sous la courbe entre 0 et $+\infty$ ou entre $-\infty$ et $+\infty$. Le résultat de certaines intégrations peut également être infini.
On a par exemple démontré que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Ici le résultat est fini et les bornes de l'intégrale sont infinies.

6.2 Notion de primitive

6.2.1 Introduction, définition

Nous avons vu dans le chapitre précédent la notion de dérivée : à une fonction f, on associe une nouvelle fonction f'. On s'intéresse maintenant au procédé inverse : si on se donne une fonction f, comment trouver une fonction F dont f soit la dérivée, c'est-à-dire telle que $F' = f$?

Définition

Soit f une fonction. On appelle **primitive** de f toute fonction F telle que $F' = f$.

Exemples

➤ Dans le chapitre précédent, on a écrit que la dérivée v de la fonction z définie par $z(t) = -\frac{9{,}81t^2}{2} + 200$ s'exprime par $v(t) = -9{,}81t$. On peut donc écrire aussi que la fonction z est une primitive de la fonction v.

➤ Par simple observation du tableau 5.1 des formules de dérivation, on peut trouver quelques primitives :

- Si $f(x) = 0$, alors, pour a constante quelconque, $F(x) = a$ définit une primitive de f.

- Si $f(x) = a$ (avec a constante), alors pour b constante quelconque, F définie par $F(x) = ax + b$ est une primitive de f.
- Si $f(x) = \exp(x)$, alors $F(x) = \exp(x)$ définit une primitive de f.
- Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, alors $F(x) = \ln(|x|)$ définit une primitive de f.
- Si $f(x) = \cos(x)$, alors $F(x) = \sin(x)$ définit une primitive de f.

Remarques

- Dans le premier exemple, la fonction définie par $z(t) = -\dfrac{9{,}81}{2}t^2 + 200$ est une primitive de v (où $v(t) = -9{,}81t$) car, en dérivant z, on trouve $z'(t) = v(t)$. Or en dérivant, la constante 200 ne joue aucun rôle (sa dérivée vaut 0) et une autre constante aurait donné la même dérivée.

  La fonction v a donc une infinité de primitives qui sont toutes les fonctions de la forme $V(t) = -\dfrac{9{,}81}{2}t^2 + C$ (où C est une constante).

  Par exemple, la fonction V définie par $V(t) = -\dfrac{9{,}81}{2}t^2 - 153{,}7$ est aussi une primitive de v.

  Il n'y a donc pas unicité de la primitive pour une fonction donnée (il y a même une infinité de primitives pour une fonction donnée) : quand on en trouve une, on dit que c'est **une** primitive de la fonction et non **la** primitive (bien que cet abus de langage soit commis couramment).
- Pour compléter ce qui précède sur l'unicité, si on impose une valeur donnée pour la fonction primitive F en un nombre donné (on souhaite que F, en plus de vérifier $F' = f$, vérifie $F(x_0) = y_0$), alors il y a une seule fonction F répondant à la question.

  Par exemple, en reprenant les notations précédentes, la fonction z est l'unique primitive de v vérifiant $z(0) = 200$.

6.2.2 Calcul de primitives

À partir des formules des dérivées usuelles, on peut établir des primitives des fonctions usuelles (tableau 6.1).

Exemple

Prouvons que A définie par $A(t) = -\tau a_0 \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$ est bien une primitive de a définie par $a(t) = a_0 \times \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$.

On dérive : A est de la forme $b\exp(u)$ dont la dérivée vaut $b \times u' \times \exp(u)$ avec $b = -\tau a_0$, $u(t) = -\dfrac{t}{\tau}$ et $u'(t) = -\dfrac{1}{\tau}$.

On a donc : $A'(t) = -\tau a_0 \times \left(-\dfrac{1}{\tau}\right) \times \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) = a_0 \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) = a(t)$. La fonction A est bien une primitive de a.