Projet 1

Approximation numérique de quelques équations aux dérivées partielles modèles

Fiche du projet

Difficulté :	1
Notions développées :	Équations différentielles linéaires : méthodes d'intégration numérique, schémas aux différences finies : schémas d'Euler, de Runge-Kutta.
Domaines d'application :	Phénomènes de transport, diffusion, propagation d'ondes.

Le but de ce projet est de mettre en évidence les propriétés mathématiques et physiques des équations aux dérivées partielles (EDP), présentées sous la forme la plus simple possible. En fait, il ne s'agit pas d'un véritable projet, basé sur un problème bien défini, mais plutôt d'une somme d'exercices théoriques qui visent à familiariser le lecteur avec quelques techniques de base de discrétisation et d'intégration des EDP. Nous commençons par présenter ces techniques dans le cas simple des équations différentielles ordinaires (EDO), pour les étendre ensuite aux EDP modèles (équation de convection, des ondes, de la chaleur). Une attention particulière sera accordée à l'analyse des schémas numériques (précision, stabilité, dissipation) et à la comparaison des résultats numériques avec les solutions exactes.

1.1 DISCRÉTISATION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ORDINAIRE

Considérons l'équation différentielle ordinaire (EDO) : trouver une fonction dérivable $u : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^m$, solution de

$$u'(t) = f\big(t, u(t)\big), \tag{1.1}$$

où T est un réel strictement positif et f est une fonction continue de $[0, T] \times \mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

Définition 1.1 *On appelle problème de Cauchy, le couplage de l'EDO (1.1) et d'une condition initiale*

$$u(0) = u_0, \tag{1.2}$$

où u_0 est un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

Nous renvoyons à un cours sur les équations différentielles, par exemple, [Crouzeix et Mignot, 1989], [Demailly, 1996], [Delabrière et Postel, 2004], pour tout ce qui concerne l'existence et l'unicité d'une solution du problème de Cauchy (1.1)-(1.2). Dans cette première partie du projet, nous présentons des méthodes numériques simples pour calculer une approximation de la solution dans le cas scalaire (on dit aussi 1D), $m = 1$.

Puisque l'ordinateur ne peut renvoyer qu'un nombre fini de résultats, la résolution numérique du problème de Cauchy (1.1)-(1.2) va commencer par choisir les points de calcul $t_0, t_1, \ldots, t_N$ de l'intervalle $I = [0, T]$. On définit ainsi une *discrétisation* (ou un maillage) de l'intervalle I. La distribution équidistante (ou uniforme) des points de calcul est la plus simple et elle sera utilisée dans ce chapitre : l'intervalle $I = [0, T]$ est divisé en N intervalles I_n de même longueur $h = T/N$ (h est appelé pas de discrétisation). On pose $I_n = [t_n, t_{n+1}]$ avec $t_n = nh$ ($t_0 = 0, t_N = T$, voir la figure 1.1). L'approximation numérique consiste à construire

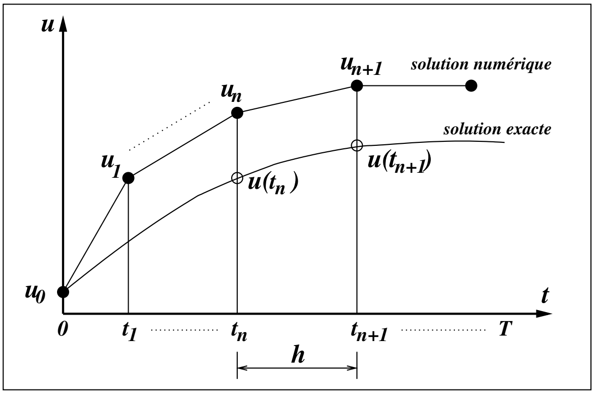

Figure 1.1 Discrétisation d'une EDO.

une suite (dépendant de N) de valeurs discrètes $u_0^{(N)}, \ldots u_N^{(N)}$ approchant les valeurs $u(t_0), \ldots u(t_N)$ de la solution exacte $u(t)$ aux mêmes points de calcul. On prendra toujours $u_0^{(N)} = u_0$ pour vérifier la condition initiale $u(t_0) = u_0$. Pour simplifier la présentation, on notera par la suite $u_n^{(N)}$ par u_n.

1.1.1 Construction de schémas numériques

Après la discrétisation de l'intervalle de définition I, il faut trouver une relation nous permettant de calculer les valeurs $u_n, n = 1, \ldots, N$. Cette relation (*schéma numérique*) est obtenue en *discrétisant* l'opérateur différentiel intervenant dans l'EDO (rappelons que le schéma démarre de la valeur u_0, fixée par la condition initiale). On distingue deux méthodes pour construire des schémas numériques pour résoudre l'EDO (1.1).

a) Méthodes basées sur des quotients aux différences

On écrit l'équation (1.1) à l'instant t_n (la variable t désigne souvent un temps) et on remplace $u'(t_n)$ par un quotient aux différences en utilisant des développements de Taylor faisant intervenir les valeurs de l'inconnue u aux instants voisins de t_n. Prenons d'abord l'exemple de la dérivée première.

Définition 1.2 *Le pas de discrétisation h étant fixé, on définit les quotients aux différences finies*

– *décentrées en avant (ou progressives)*

$$D^+u(t) = \frac{u(t+h) - u(t)}{h}, \tag{1.3}$$

– *décentrées en arrière (ou régressives)*

$$D^-u(t) = \frac{u(t) - u(t-h)}{h}, \tag{1.4}$$

– *centrées*

$$D^0u(t) = \frac{u(t+h) - u(t-h)}{2h}. \tag{1.5}$$

Supposons que la fonction u soit deux fois continûment dérivable. Il existe alors $\theta_n^+ \in [0, h]$ tel que

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + hu'(t_n) + \frac{h^2}{2}u''(t_n + \theta_n^+). \tag{1.6}$$

On déduit de ce développement une approximation de $u'(t_n)$

$$u'(t_n) = \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{h} - \frac{h}{2}u''(t_n + \theta_n^+) \simeq D^+u(t_n). \tag{1.7}$$