TOUT EN FICHES

EXERCICES ET MÉTHODES DE MATHÉMATIQUES LICENCE 2

Myriam Maumy-Bertrand

est maître de conférences à l'université de Strasbourg, intervenante à l'IPAG de Strasbourg et interrogatrice pour différents concours administratifs.

Frédéric Bertrand

est un ancien élève de l'ENS Lyon et est maître de conférences à l'université de Strasbourg. Il intervient à l'IPAG de Strasbourg dans la préparation des concours administratifs et à des concours de recrutement de l'enseignement supérieur.

Daniel Fredon

est maître de conférences de mathématiques appliquées.

Yacoubou Idi Rabba

est agrégé de Mathématiques dans la section étranger de l'université de Strasbourg.

DUNOD

Illustration de couverture : © delabo - Fotolia.com

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-075420-5

Table des matières

Avant-propos

« -Deux ans ! dit Dantès, vous croyez que je pourrais apprendre toutes ces choses en deux ans ?
- Dans leur application, non ; dans leurs principes, oui : apprendre n'est pas savoir ; il y a les sachants et les savants : c'est la mémoire qui fait les uns, c'est la philosophie qui fait les autres, dit l'abbé Faria. »

D'après Le Comte de Monte-Cristo, A. Dumas, 1844.

Chères étudiantes, chers étudiants,

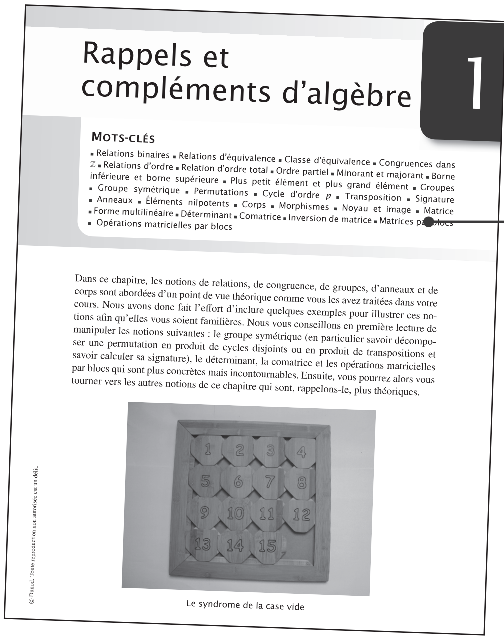
Ce texte peut vous paraître démodé mais il est en fait complètement d'actualité. Vous êtes des Dantès en herbe ! Vous avez la lourde tâche d'apprendre cette année et l'année prochaine les principes fondamentaux des mathématiques (en algèbre, en analyse, en géométrie, en probabilités et en statistique).
À l'issue de ces deux ans de licence de mathématiques ou de licence mathématiques/informatique (comme celle de Strasbourg), vous serez des « sachants » comme le dit l'abbé Faria, mais pour devenir des « savants » c'est la lecture quotidienne de cet ouvrage qui vous le permettra.
Il est certain qu'il existe des différences de programme entre les Universités mais les deux premières années de licence (L1 et L2) ont suffisamment de points communs pour proposer des livres utiles à vous, étudiants !
Votre temps est compté : deux ans ! Pour aller vite, il faut la taille mince et le prix léger. Il faut aussi une organisation en fiches courtes pour vous permettre de ne retenir que les sujets du moment, semestre après semestre.
Il faut avoir fait des choix cohérents et organisés de ce qui est le plus couramment enseigné lors des deux premières années des licences de mathématiques, mathématiques/informatique, mais aussi de sciences physiques.
Il faut un index détaillé pour effacer rapidement un malencontreux trou de mémoire.
Dans cet ouvrage, il y a donc l'essentiel, sauf votre propre travail.

Bon courage !
Les auteurs.

Toutes vos remarques, vos commentaires, vos critiques, et même vos encouragements, seront accueillis avec plaisir.

fbertran@math.unistra.fr mmaumy@math.unistra.fr
rabba@math.unistra.fr daniel.fredon@laposte.net

Comment utiliser



Rappels et compléments d'algèbre

1

Mots-clés

■ Relations binaires ■ Relations d'équivalence ■ Classe d'équivalence ■ Congruences dans $\mathbb{Z}$ ■ Relations d'ordre ■ Relation d'ordre total ■ Ordre partiel ■ Minorant et majorant ■ Borne inférieure et borne supérieure ■ Plus petit élément et plus grand élément ■ Groupes ■ Groupe symétrique ■ Permutations ■ Cycle d'ordre p ■ Transposition ■ Signature ■ Anneaux ■ Éléments nilpotents ■ Corps ■ Morphismes ■ Noyau et image ■ Matrice ■ Forme multilinéaire ■ Déterminant ■ Comatrice ■ Inversion de matrice ■ Matrices par blocs ■ Opérations matricielles par blocs

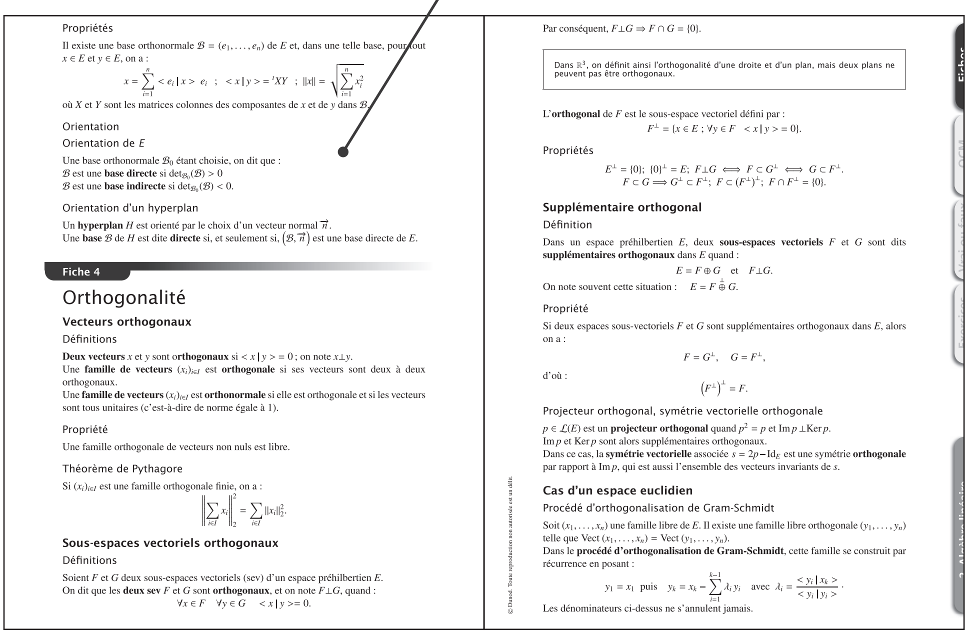
Dans ce chapitre, les notions de relations, de congruence, de groupes, d'anneaux et de corps sont abordées d'un point de vue théorique comme vous les avez traitées dans votre cours. Nous avons donc fait l'effort d'inclure quelques exemples pour illustrer ces notions afin qu'elles vous soient familières. Nous vous conseillons en première lecture de manipuler les notions suivantes : le groupe symétrique (en particulier savoir décomposer une permutation en produit de cycles disjoints ou en produit de transpositions et savoir calculer sa signature), le déterminant, la comatrice et les opérations matricielles par blocs qui sont plus concrètes mais incontournables. Ensuite, vous pourrez alors vous tourner vers les autres notions de ce chapitre qui sont, rappelons-le, plus théoriques.

Le syndrome de la case vide

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

6 chapitres
et leurs mots-clés

Des rappels de cours sous forme de fiches



Propriétés

Il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et, dans une telle base, pour tout $x \in E$ et $y \in E$, on a :

$$x = \sum_{i=1}^{n} < e_i \mid x > \ e_i \quad ; \quad < x \mid y > = {}^tXY \quad ; \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

où X et Y sont les matrices colonnes des composantes de x et de y dans $\mathcal{B}$.

Orientation

Orientation de E

Une base orthonormale $\mathcal{B}_0$ étant choisie, on dit que :
$\mathcal{B}$ est une **base directe** si $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0$
$\mathcal{B}$ est une **base indirecte** si $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) < 0$.

Orientation d'un hyperplan

Un **hyperplan** H est orienté par le choix d'un vecteur normal $\vec{n}$.
Une **base** $\mathcal{B}$ de H est dite **directe** si, et seulement si, $(\mathcal{B}, \vec{n})$ est une base directe de E.

Fiche 4

Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux

Définitions

Deux vecteurs x et y sont **orthogonaux** si $< x \mid y > = 0$; on note $x \perp y$.
Une **famille de vecteurs** $(x_i)_{i \in I}$ est **orthogonale** si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.
Une **famille de vecteurs** $(x_i)_{i \in I}$ est **orthonormale** si elle est orthogonale et si les vecteurs sont tous unitaires (c'est-à-dire de norme égale à 1).

Propriété

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Théorème de Pythagore

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille orthogonale finie, on a :

$$\left\| \sum_{i \in I} x_i \right\|_2^2 = \sum_{i \in I} \|x_i\|_2^2.$$

Sous-espaces vectoriels orthogonaux

Définitions

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels (sev) d'un espace préhilbertien E.
On dit que les **deux sev** F et G sont **orthogonaux**, et on note $F \perp G$, quand :
$$\forall x \in F \quad \forall y \in G \quad < x \mid y >= 0.$$

Par conséquent, $F \perp G \Rightarrow F \cap G = \{0\}$.

Dans $\mathbb{R}^3$, on définit ainsi l'orthogonalité d'une droite et d'un plan, mais deux plans ne peuvent pas être orthogonaux.

L'**orthogonal** de F est le sous-espace vectoriel défini par :
$$F^\perp = \{x \in E \ ; \ \forall y \in F \quad < x \mid y > = 0\}.$$

Propriétés

$$E^\perp = \{0\}; \ \{0\}^\perp = E; \ F \perp G \iff F \subset G^\perp \iff G \subset F^\perp.$$
$$F \subset G \Longrightarrow G^\perp \subset F^\perp; \ F \subset (F^\perp)^\perp; \ F \cap F^\perp = \{0\}.$$

Supplémentaire orthogonal

Définition

Dans un espace préhilbertien E, deux **sous-espaces vectoriels** F et G sont dits **supplémentaires orthogonaux** dans E quand :
$$E = F \oplus G \quad \text{et} \quad F \perp G.$$
On note souvent cette situation : $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$.

Propriété

Si deux espaces sous-vectoriels F et G sont supplémentaires orthogonaux dans E, alors on a :
$$F = G^\perp, \quad G = F^\perp,$$
d'où :
$$\left(F^\perp\right)^\perp = F.$$

Projecteur orthogonal, symétrie vectorielle orthogonale

$p \in \mathcal{L}(E)$ est un **projecteur orthogonal** quand $p^2 = p$ et $\mathrm{Im}\, p \perp \mathrm{Ker}\, p$.
$\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$ sont alors supplémentaires orthogonaux.
Dans ce cas, la **symétrie vectorielle** associée $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ est une symétrie **orthogonale** par rapport à $\mathrm{Im}\, p$, qui est aussi l'ensemble des vecteurs invariants de s.

Cas d'un espace euclidien

Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

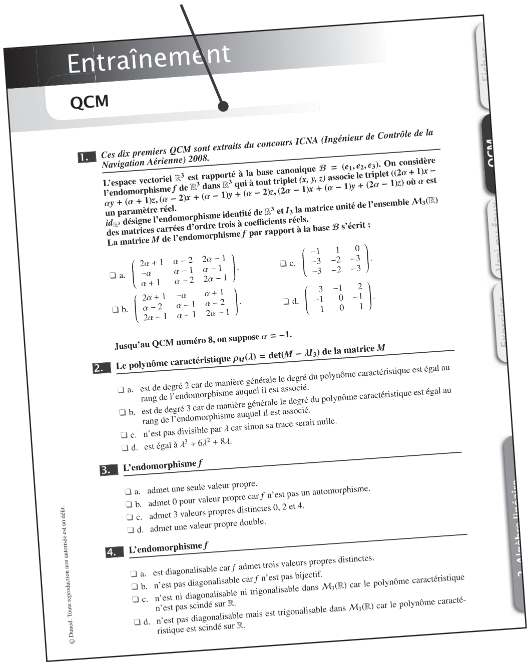
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille libre de E. Il existe une famille libre orthogonale $(y_1, \ldots, y_n)$ telle que $\mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{Vect}\,(y_1, \ldots, y_n)$.
Dans le **procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt**, cette famille se construit par récurrence en posant :
$$y_1 = x_1 \quad \text{puis} \quad y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i\, y_i \quad \text{avec} \quad \lambda_i = \frac{< y_i \mid x_k >}{< y_i \mid y_i >}.$$
Les dénominateurs ci-dessus ne s'annulent jamais.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

cet ouvrage ?

Des QCM
pour s'auto-évaluer

Des questions Vrai ou Faux


Entraînement

QCM

1. *Ces dix premiers QCM sont extraits du concours ICNA (Ingénieur de Contrôle de la Navigation Aérienne) 2008.*
L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à la base canonique $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à tout triplet (x,y,z) associe le triplet $((2\alpha+1)x-\alpha y+(\alpha+1)z,(\alpha-2)x+(\alpha-1)y+(\alpha-2)z,(2\alpha-1)x+(\alpha-1)y+(2\alpha-1)z)$ où α est un paramètre réel.
$id_{\mathbb{R}^3}$ désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et I_3 la matrice unité de l'ensemble $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre trois à coefficients réels.
La matrice M de l'endomorphisme f par rapport à la base $\mathcal{B}$ s'écrit :

❑ a. $\begin{pmatrix} 2\alpha+1 & \alpha-2 & 2\alpha-1 \\ -\alpha & \alpha-1 & \alpha-1 \\ \alpha+1 & \alpha-2 & 2\alpha-1 \end{pmatrix}$. ❑ c. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -3 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

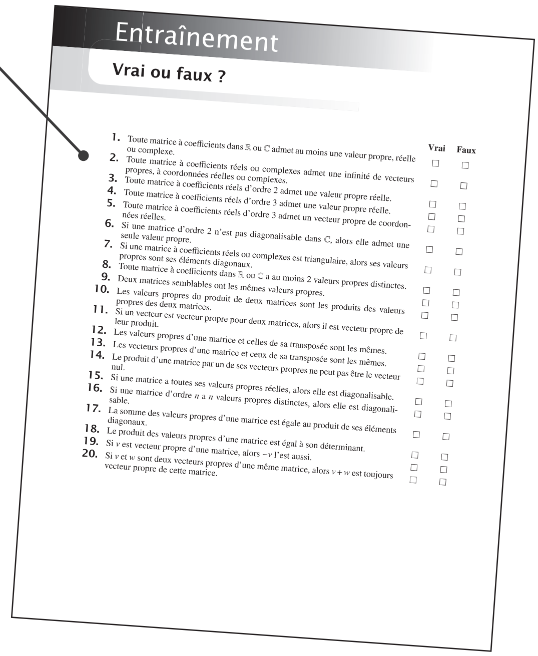
❑ b. $\begin{pmatrix} 2\alpha+1 & -\alpha & \alpha+1 \\ \alpha-2 & \alpha-1 & \alpha-2 \\ 2\alpha-1 & \alpha-1 & 2\alpha-1 \end{pmatrix}$. ❑ d. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Jusqu'au QCM numéro 8, on suppose $\alpha=-1$.

2. Le polynôme caractéristique $\rho_M(\lambda)=\det(M-\lambda I_3)$ de la matrice M
❑ a. est de degré 2 car de manière générale le degré du polynôme caractéristique est égal au rang de l'endomorphisme auquel il est associé.
❑ b. est de degré 3 car de manière générale le degré du polynôme caractéristique est égal au rang de l'endomorphisme auquel il est associé.
❑ c. n'est pas divisible par λ car sinon sa trace serait nulle.
❑ d. est égal à $\lambda^3+6\lambda^2+8\lambda$.

3. L'endomorphisme f
❑ a. admet une seule valeur propre.
❑ b. admet 0 pour valeur propre car f n'est pas un automorphisme.
❑ c. admet 3 valeurs propres distinctes 0, 2 et 4.
❑ d. admet une valeur propre double.

4. L'endomorphisme f
❑ a. est diagonalisable car f admet trois valeurs propres distinctes.
❑ b. n'est pas diagonalisable car f n'est pas bijectif.
❑ c. n'est ni diagonalisable ni trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car le polynôme caractéristique n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.
❑ d. n'est pas diagonalisable mais est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.

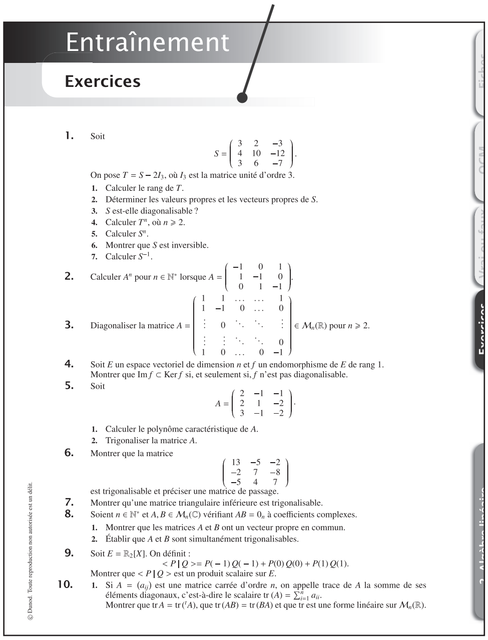

Entraînement

Vrai ou faux ?

		Vrai	Faux
1.	Toute matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ admet au moins une valeur propre, réelle ou complexe.	☐	☐
2.	Toute matrice à coefficients réels ou complexes admet une infinité de vecteurs propres, à coordonnées réelles ou complexes.	☐	☐
3.	Toute matrice à coefficients réels d'ordre 2 admet une valeur propre réelle.	☐	☐
4.	Toute matrice à coefficients réels d'ordre 3 admet une valeur propre réelle.	☐	☐
5.	Toute matrice à coefficients réels d'ordre 3 admet un vecteur propre de coordonnées réelles.	☐	☐
6.	Si une matrice d'ordre 2 n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$, alors elle admet une seule valeur propre.	☐	☐
7.	Si une matrice à coefficients réels ou complexes est triangulaire, alors ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.	☐	☐
8.	Toute matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ a au moins 2 valeurs propres distinctes.	☐	☐
9.	Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.	☐	☐
10.	Les valeurs propres du produit de deux matrices sont les produits des valeurs propres des deux matrices.	☐	☐
11.	Si un vecteur est vecteur propre pour deux matrices, alors il est vecteur propre de leur produit.	☐	☐
12.	Les valeurs propres d'une matrice et celles de sa transposée sont les mêmes.	☐	☐
13.	Les vecteurs propres d'une matrice et ceux de sa transposée sont les mêmes.	☐	☐
14.	Le produit d'une matrice par un de ses vecteurs propres ne peut pas être le vecteur nul.	☐	☐
15.	Si une matrice a toutes ses valeurs propres réelles, alors elle est diagonalisable.	☐	☐
16.	Si une matrice d'ordre n a n valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable.	☐	☐
17.	La somme des valeurs propres d'une matrice est égale au produit de ses éléments diagonaux.	☐	☐
18.	Le produit des valeurs propres d'une matrice est égal à son déterminant.	☐	☐
19.	Si v est vecteur propre d'une matrice, alors $-v$ l'est aussi.	☐	☐
20.	Si v et w sont deux vecteurs propres d'une même matrice, alors $v+w$ est toujours vecteur propre de cette matrice.	☐	☐

Des exercices pour s'entraîner

Toutes les réponses commentées


Entraînement

Exercices

1. Soit
$$S=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$
On pose $T=S-2I_3$, où I_3 est la matrice unité d'ordre 3.
1. Calculer le rang de T.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de S.
3. S est-elle diagonalisable ?
4. Calculer T^n, où $n\geqslant 2$.
5. Calculer S^n.
6. Montrer que S est inversible.
7. Calculer S^{-1}.

2. Calculer A^n pour $n\in\mathbb{N}^*$ lorsque $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Diagonaliser la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour $n\geqslant 2$.

4. Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E de rang 1. Montrer que $\operatorname{Im} f\subset\operatorname{Ker} f$ si, et seulement si, f n'est pas diagonalisable.

5. Soit
$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$
1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Trigonaliser la matrice A.

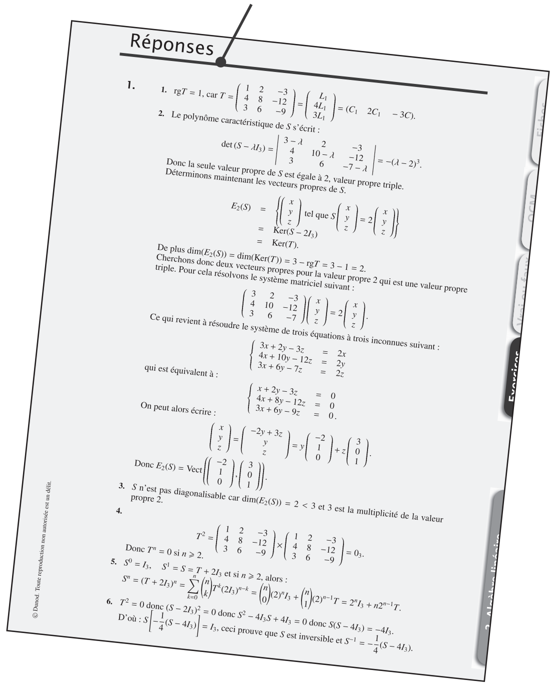
6. Montrer que la matrice
$$\begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$
est trigonalisable et préciser une matrice de passage.

7. Montrer qu'une matrice triangulaire inférieure est trigonalisable.

8. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AB=0_n$ à coefficients complexes.
1. Montrer que les matrices A et B ont un vecteur propre en commun.
2. Établir que A et B sont simultanément trigonalisables.

9. Soit $E=\mathbb{R}_2[X]$. On définit :
$$<P\mid Q>=P(-1)\,Q(-1)+P(0)\,Q(0)+P(1)\,Q(1).$$
Montrer que $<P\mid Q>$ est un produit scalaire sur E.

10. 1. Si $A=(a_{ij})$ est une matrice carrée d'ordre n, on appelle trace de A la somme de ses éléments diagonaux, c'est-à-dire le scalaire $\operatorname{tr}(A)=\sum_{i=1}^n a_{ii}$.
Montrer que $\operatorname{tr} A=\operatorname{tr}({}^tA)$, que $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$ et que tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.


Réponses

1. 1. $\operatorname{rg} T=1$, car $T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 8 & -12 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L_1 \\ 4L_1 \\ 3L_1 \end{pmatrix}=(C_1 \quad 2C_1 \quad -3C_1)$.

2. Le polynôme caractéristique de S s'écrit :
$$\det(S-\lambda I_3)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -3 \\ 4 & 10-\lambda & -12 \\ 3 & 6 & -7-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-2)^3.$$
Donc la seule valeur propre de S est égale à 2, valeur propre triple.
Déterminons maintenant les vecteurs propres de S.
$$E_2(S)=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tel que } S\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\}=\operatorname{Ker}(S-2I_3)=\operatorname{Ker}(T).$$
De plus $\dim(E_2(S))=\dim(\operatorname{Ker}(T))=3-\operatorname{rg}T=3-1=2$.
Cherchons donc deux vecteurs propres pour la valeur propre 2 qui est une valeur propre triple. Pour cela résolvons le système matriciel suivant :
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$
Ce qui revient à résoudre le système de trois équations à trois inconnues suivant :
$$\begin{cases} 3x+2y-3z = 2x \\ 4x+10y-12z = 2y \\ 3x+6y-7z = 2z \end{cases}$$
qui est équivalent à :
$$\begin{cases} x+2y-3z = 0 \\ 4x+8y-12z = 0 \\ 3x+6y-9z = 0. \end{cases}$$
On peut alors écrire :
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2y+3z \\ y \\ z \end{pmatrix}=y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Donc $E_2(S)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

3. S n'est pas diagonalisable car $\dim(E_2(S))=2<3$ et 3 est la multiplicité de la valeur propre 2.

4.
$$T^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 8 & -12 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 8 & -12 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}=0_3.$$
Donc $T^n=0$ si $n\geqslant 2$.

5. $S^0=I_3$, $S^1=S=T+2I_3$ et si $n\geqslant 2$, alors :
$$S^n=(T+2I_3)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T^k(2I_3)^{n-k}=\binom{n}{0}(2)^nI_3+\binom{n}{1}(2)^{n-1}T=2^nI_3+n2^{n-1}T.$$

6. $T^2=0$ donc $(S-2I_3)^2=0$ donc $S^2-4I_3S+4I_3=0$ donc $S(S-4I_3)=-4I_3$.
D'où : $S\left[-\frac{1}{4}(S-4I_3)\right]=I_3$, ceci prouve que S est inversible et $S^{-1}=-\frac{1}{4}(S-4I_3)$.

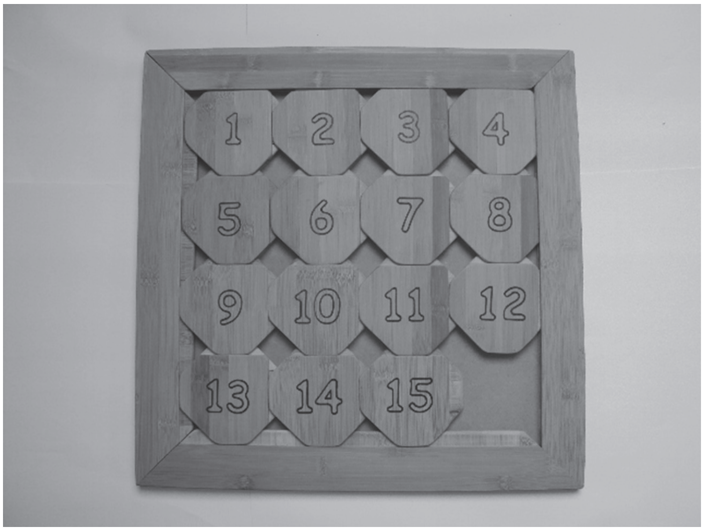
Rappels et compléments d'algèbre

1

MOTS-CLÉS

▪ Relations binaires ▪ Relations d'équivalence ▪ Classe d'équivalence ▪ Congruences dans $\mathbb{Z}$ ▪ Relations d'ordre ▪ Relation d'ordre total ▪ Ordre partiel ▪ Minorant et majorant ▪ Borne inférieure et borne supérieure ▪ Plus petit élément et plus grand élément ▪ Groupes ▪ Groupe symétrique ▪ Permutations ▪ Cycle d'ordre p ▪ Transposition ▪ Signature ▪ Anneaux ▪ Éléments nilpotents ▪ Corps ▪ Morphismes ▪ Noyau et image ▪ Matrice ▪ Forme multilinéaire ▪ Déterminant ▪ Comatrice ▪ Inversion de matrice ▪ Matrices par blocs ▪ Opérations matricielles par blocs

Dans ce chapitre, les notions de relations, de congruences, de groupes, d'anneaux et de corps sont abordées d'un point de vue théorique comme vous les avez traitées dans votre cours. Nous avons donc fait l'effort d'inclure quelques exemples pour illustrer ces notions afin qu'elles vous soient familières. Nous vous conseillons en première lecture de manipuler les notions suivantes : le groupe symétrique (en particulier savoir décomposer une permutation en produit de cycles disjoints ou en produit de transpositions et savoir calculer sa signature), le déterminant, la comatrice et les opérations matricielles par blocs qui sont plus concrètes mais incontournables. Ensuite, vous pourrez alors vous tourner vers les autres notions de ce chapitre qui sont, rappelons-le, plus théoriques.



Le syndrome de la case vide

Relations binaire, d'équivalence et d'ordre. Congruences

Relations binaires

Définition

Soit E un ensemble. Choisir une partie Γ de $E \times E$, c'est définir une **relation binaire** $\mathcal{R}$ sur E. Si $(x, y) \in \Gamma$, on dit que x et y sont en relation, et on note $x\mathcal{R}y$.
Remarque : $E \times E$ désigne le produit cartésien de E par lui-même, voir par exemple la Fiche 2 dans Mathématiques Licence 1, Exercices et méthodes, Dunod.

Propriétés

Une relation binaire $\mathcal{R}$, définie sur un ensemble E, est :
réflexive si elle vérifie : $\forall x \in E \quad x\mathcal{R}x$;
symétrique si elle vérifie : $\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$;
antisymétrique si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Longrightarrow x = y.$$

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } x \neq y) \Longrightarrow \text{non } (y\mathcal{R}x).$$

transitive si elle vérifie :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall z \in E \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z.$$

Relation et classe d'équivalence

Définitions

Une relation binaire $\mathcal{R}$, définie sur un ensemble E, est une **relation d'équivalence** si elle est, à la fois, réflexive, symétrique et transitive.
Si $x \in E$, on appelle **classe d'équivalence** de x, modulo $\mathcal{R}$, l'ensemble des y de E tels que $x\mathcal{R}y$.

Classes d'équivalence et partition

L'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ constitue une **partition** de E.
Remarque : la notion de partition a été introduite dans la Fiche 2, dans Mathématiques Licence 1, Exercices et méthodes, Dunod.
Si on se donne une partition de E, la relation « x et y appartiennent au même élément de la partition » est une relation d'équivalence sur E.
Soit F un ensemble. Si f est une application de E dans F, la relation binaire $x\mathcal{R}x'$ définie par $f(x) = f(x')$ est une relation d'équivalence dans E. Les classes d'équivalence sont les images réciproques $f^{-1}(\{y\})$ des parties à un élément de F.

Congruences dans $\mathbb{Z}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La relation binaire dans $\mathbb{Z}$, définie par a et b ont le même reste dans la division par n, ou encore écrit mathématiquement par $n/(a - b)$ se note :

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Il faut lire : ***a* congru à *b*** modulo n. C'est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

Notation : on écrit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour désigner l'ensemble des classes ainsi formées par regroupement :

$$\overline{a} = \{b \in \mathbb{Z} \ ; a \equiv b \ (\text{mod } n)\}.$$

Relations d'ordre

Définitions

Une relation binaire $\mathcal{R}$, définie dans un ensemble E, est une **relation d'ordre** si elle est, à la fois, réflexive, antisymétrique et transitive.
Notation : on la note $\prec$.
Une relation d'ordre $\prec$ dans E est dite **relation d'ordre total** si deux éléments quelconques x et y de E sont toujours comparables, c'est-à-dire si l'on a $x \prec y$ ou $y \prec x$.
Dans le cas contraire, on dit que **l'ordre est partiel**.

> $\leqslant$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$.
> $\subset$ est une relation d'ordre partiel dans $\mathcal{P}(E)$. Par exemple :
> $\{3\} \not\subset \{2\}$ et $\{2\} \not\subset \{3\}$ bien que $\{2\} \in \mathcal{P}(\{2,3\})$ et $\{3\} \in \mathcal{P}(\{2,3\})$.

Éléments particuliers

Soit A une partie d'un ensemble ordonné E.
S'il existe un élément a de E tel que, pour tout $x \in A$, on a $x \prec a$, on dit que a est un **majorant** de A et que A est une **partie majorée** de E.
De même, un élément b de E est un **minorant** de A si $b \prec x$ pour tout x de A. On dit alors que A est une **partie minorée** de E.
Une **partie bornée** de E est une partie qui est à la fois majorée et minorée.
Un élément a de E est appelé **plus grand élément** de A si $a \in A$ et si a est un majorant de A. Si un tel élément existe, il est unique.
De même, un élément b de E est le **plus petit élément** de A si $b \in A$ et si b est un minorant de A.
On appelle **borne supérieure** d'une partie majorée A, le plus petit des majorants de A, et **borne inférieure** d'une partie minorée A le plus grand des minorants de A.
Si ces bornes existent, elles sont uniques.

> Dans $(\mathbb{R},\leqslant)$, pour démontrer que a est la borne supérieure de A, on démontre souvent :
> que c'est un majorant, soit $x \leqslant a$ pour tout $x \in A$;
> que, pour tout $\varepsilon > 0$, $a - \varepsilon$ n'est pas un majorant, c'est-à-dire qu'il existe $x \in A$ tel que $a - \varepsilon < x$.

Fiche 2

Groupe. Groupe symétrique

Remarque : cette fiche est déjà connue (voir la Fiche 5 dans Mathématiques Licence 1, Exercices et méthodes, Dunod). On va ici l'illustrer à l'aide de quelques exemples.

Loi de composition interne

Définitions

Une **loi de composition interne** sur un ensemble E est une application de $E \times E$ dans E. À un couple (x, y), on associe un élément, noté $x * y$, ou $x + y$, ou xy, ..., appelé **composé** de x et de y.

Propriétés

Une loi de composition interne $*$ sur E est **associative** si :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall z \in E \quad (x * y) * z = x * (y * z).$$

Une loi de composition interne $*$ sur E est **commutative** si :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad x * y = y * x.$$

Elle admet un **élément neutre** e si :

$$\exists\, e \in E \quad \forall x \in E \quad x * e = e * x = x.$$

Remarque : si l'élément neutre existe, il est unique.

> L'addition dans $\mathbb{Z}$ est associative, commutative, admet 0 comme élément neutre.

Un élément x est **inversible** (ou **symétrisable**) dans E, s'il existe $x' \in E$ (dit **inverse**, ou **symétrique**, de x) tel que :

$$x * x' = x' * x = e.$$

Si $*$ et $\top$ sont deux lois de composition interne de E, on dit que $*$ est **distributive** par rapport à $\top$, si l'on a toujours :

$$x * (y \top z) = (x * y) \top (x * z) \quad \text{et} \quad (y \top z) * x = (y * x) \top (z * x).$$

> La multiplication dans $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est distributive par rapport à l'addition.

Groupe

Définitions

Un ensemble non vide G, muni d'une loi $*$, est un **groupe** si :
la loi $*$ est associative ;
il existe un élément neutre noté e pour la loi $*$;
tout élément de G possède un symétrique dans G.

Remarque : si, de plus, la loi $*$ est commutative, le **groupe** est dit **commutatif**, ou **abélien**. Généralement, un groupe abélien est noté additivement, c'est-à-dire avec la loi + et dans ce cas, le symétrique x' de x est alors noté $-x$, qui se dit l'**opposé** de x. Dans le cas général, la loi d'un groupe est notée $*$ ou même sans symbole et le symétrique s'appelle l'**inverse** et est noté x^{-1}.

> $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R}^*,\times)$, $(\{-1,+1\},\times)$, $(\{1\},\times)$, $(\{0\},+)$, $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{C}^*,\times)$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+)$ sont des groupes mais $(\mathbb{Z},\times)$ n'est pas un groupe car par exemple le symétrique de 2 qui vaut $\frac{1}{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{Z}$.

Propriété
Dans un groupe, tout élément est **régulier** (on dit aussi **simplifiable**), c'est-à-dire que l'on a toujours :

$$x * y = x * z \Longrightarrow y = z \quad \text{et} \quad y * x = z * x \Longrightarrow y = z.$$

Sous-groupe

Définitions
Une partie H est dite **stable** dans le groupe $(G, *)$ si $\forall h \in H$ et $\forall h' \in H$ alors $h * h' \in H$.
Une partie stable H d'un groupe G est un **sous-groupe** de G si la restriction à H de la loi de G définit dans H une structure de groupe.

Propriété caractéristique
Pour qu'une partie non vide H d'un groupe G soit un sous-groupe de G, il faut et il suffit que :

$$\forall x \in H \quad \forall y \in H \quad xy \in H \quad \text{et} \quad x^{-1} \in H$$

ou encore :

$$\forall x \in H \quad \forall y \in H \quad xy^{-1} \in H.$$

> Ce sera souvent la deuxième qui sera utilisée pour démontrer qu'un sous-ensemble est un sous-groupe.

Proposition
L'intersection d'une famille de sous-groupes est un sous-groupe de G et est appelée **sous-groupe engendré** par les éléments de ces sous-groupes qui ont été intersectés.

Morphismes de groupes

Définitions
Soient G et G' deux groupes notés multiplicativement d'éléments neutres respectifs e et e'. Une application f, de G dans G', est un **morphisme de groupes** si, et seulement si :

$$\forall x \in G \quad \forall y \in G \quad f(xy) = f(x)f(y).$$

> **Remarque :** $e' = f(e)$; $\quad f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.

Si, de plus, f est bijective, on dit que f est un **isomorphisme de groupes**. Les deux groupes G et G' sont dits **isomorphes**.

Propriété
Si f est un morphisme de groupes de G dans G' et g un morphisme de groupes de G' dans G'', alors $g \circ f$ est aussi un morphisme de groupes de G dans G''.

Définitions
Soient G et G' deux groupes notés multiplicativement, d'éléments neutres respectifs e et e', et f un morphisme de groupes de G dans G'.
$f(G)$ est appelé l'**image du morphisme** f et est noté $\operatorname{Im} f$.

$N = f^{-1}(\{e'\}) = \{x/x \in G \text{ et } f(x) = e'\}$ est appelé le **noyau du morphisme** f et est noté $\operatorname{Ker} f$.
Remarque : on peut montrer que $f(G)$ est un sous-groupe de G' et N un sous-groupe de G.

Théorème
f est injectif $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{e\}$;
f est surjectif $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} f = G'$.

Groupe symétrique

Définitions

L'ensemble des bijections d'un ensemble fini noté E à n éléments, noté $\mathcal{S}(E)$, muni de la loi de composition des bijections, est un groupe appelé **groupe des permutations** (ou **substitutions**) de l'ensemble E.
$(\mathcal{S}(E), \circ)$ est isomorphe à $(\mathcal{S}_n, \circ)$, groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ de $\mathbb{N}$, appelé **groupe symétrique d'ordre** n.

Décomposition d'une permutation en produit de cycles

Définition
Un **cycle** (ou **permutation circulaire**) **d'ordre** p (où $p \leqslant n$) est une permutation σ de l'ensemble fini E de cardinal n qui laisse les $(n - p)$ éléments de l'ensemble E invariants point par point, et est telle que l'on puisse ranger les p éléments restants $(a_1, \ldots, a_p)$ de manière que :

$$\sigma(a_1) = a_2 \ , \sigma(a_2) = a_3 \ , \ \ldots \ , \sigma(a_{p-1}) = a_p \ , \sigma(a_p) = a_1.$$

Notation : on note $\sigma = (a_1, \ldots, a_p)$.

Dans $\mathcal{S}_5$, la bijection $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ est le cycle d'ordre 3 suivant : $(2 \quad 3 \quad 4)$.

Théorème
Toute permutation de l'ensemble fini E peut être décomposée en produit de cycles à supports disjoints. Par conséquent, deux tels cycles commutent.

Définition
On appelle **transposition de** E une permutation de E qui échange deux éléments de E, et qui laisse invariants tous les autres. C'est donc un cycle d'ordre 2.

Théorème
Toute permutation de l'ensemble E est décomposable en un produit de transpositions.
Remarque : cette décomposition n'est pas unique, mais, pour une permutation donnée, la parité du nombre de transpositions est fixe.

- Si ce nombre de transpositions est pair, on dit que la **permutation est paire**.
- Si ce nombre de transpositions est impair, on dit que la **permutation est impaire**.

Définition
La **signature d'une permutation** σ est le nombre, noté $\varepsilon(\sigma)$, égal à 1 si la permutation σ est paire, égal à -1 si la permutation σ est impaire.

Théorème
La signature d'un cycle d'ordre p est égale à $(-1)^{p-1}$.

Théorème
La signature ε est un morphisme de groupes de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\{-1, 1\}, \times)$.

> Ainsi pour déterminer $\varepsilon(\sigma)$, il suffit de décomposer σ en produit de cycles et d'appliquer le fait que la signature d'un cycle d'ordre p est $(-1)^{p-1}$.

Fiche 3

Anneau. Corps

Anneau

Structure d'anneau

Un ensemble A, muni d'une loi notée $+$ (dite addition) et d'une loi notée $\times$ (dite multiplication), possède une **structure d'anneau** si :
A possède une structure de groupe commutatif pour l'addition ;
la multiplication est associative et possède un élément neutre ;
la multiplication est distributive par rapport à l'addition.
Remarque : si la multiplication est commutative, l'**anneau** est dit **commutatif**.

Règles de calcul

$$x\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x\,y_i \quad \text{et} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)x = \sum_{i=1}^{n} y_i\,x.$$

Formule du binôme de Newton

Dans un anneau commutatif, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k} \text{ où } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

On a aussi la formule suivante : $x^n - y^n = (x-y)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1}y^k$.

> Si l'anneau n'est pas commutatif, ces deux dernières formules restent vraies pour des éléments qui commutent, c'est-à-dire tels que $xy = yx$.

Élement nilpotent

On dit qu'un **élément** a d'un anneau A est **nilpotent** s'il existe un entier $n > 0$ tel que $a^n = 0$. Le plus petit entier pour lequel cette identité est vérifiée est appelé l'**indice de nilpotence** de l'élément a.

> Dans l'anneau $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un élément nilpotent d'indice 3.

Sous-anneau

On dit qu'une partie B d'un anneau A, stable pour $+$ et $\times$, est un **sous-anneau de** A, si la restriction à B des deux lois de A définit dans B une structure d'anneau, avec le même élément neutre pour $\times$ que dans A.

> Pour qu'une partie B d'un anneau A soit un sous-anneau de A, il faut et il suffit que $1_A \in B$ et :
>
> $$\forall x \in B \quad \forall y \in B \quad x - y \in B \quad \text{et} \quad xy \in B.$$

Morphismes d'anneaux

A et B étant deux anneaux, une application f, de A dans B, est un **morphisme d'anneaux** si l'on a toujours :

$$f(x+y) = f(x) + f(y); \quad f(xy) = f(x)f(y); \quad f(1_A) = 1_B.$$

Idéal

Un **idéal** I d'un anneau A est un sous-groupe additif de A vérifiant :

$$\forall x \in I, \quad \forall a \in A, \qquad ax \in I \text{ et } xa \in I.$$

Remarques : si A est un anneau, $\{0\}$ et A sont des idéaux de A. Si A est un anneau commutatif, l'ensemble des multiples d'un élément b, noté bA est un idéal de A.

> Si $A = (\mathbb{R}[X], +, \times)$ alors l'ensemble des polynômes qui s'annulent en 1 (cet ensemble est aussi l'ensemble des polynômes qui se factorisent par $X-1$) est un idéal.

Idéal principal

Si A est un anneau commutatif non nul, un **idéal principal** de A est un idéal de l'anneau A engendré par un seul élément, c'est-à-dire un idéal $I = (a) = \{xa | x \in A\}$, où a est un élément de A.

> L'ensemble des multiples entiers de 3 noté $3\mathbb{Z}$ est un idéal principal de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$.

Diviseurs de zéro

Un élément a de l'anneau A est un **diviseur de zéro** si et seulement si :

$$a \neq 0 \text{ et il existe } b \neq 0 \text{ tel que } ab = 0.$$

Dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un diviseur de zéro car $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on a : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Anneau intègre

Un **anneau intègre** est un anneau commutatif, non réduit à $\{0\}$, et sans diviseur de zéro.

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau intègre mais $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ n'est pas un anneau intègre.

Pour qu'un anneau commutatif, non réduit à $\{0\}$, soit intègre, il faut et il suffit que tout élément non nul soit simplifiable pour la multiplication.

Définition

Un **anneau principal** est un anneau intègre dont tout idéal est un idéal principal.

Corps

Structure de corps

Un **corps** est un anneau non réduit à $\{0\}$ dont tous les éléments, sauf 0, sont inversibles. Le **corps** est dit **commutatif** si l'anneau est commutatif.

$(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$, $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +, \times)$ sont des corps mais $(\mathbb{Z}, +, \times)$ et $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \times)$ ne sont pas des corps.

Théorème

Si $\mathbb{K}$ est un corps, alors $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal.

Sous-corps

On dit qu'une partie L d'un corps K, stable pour $+$ et $\times$, est un **sous-corps** de K, si la restriction à L des deux lois de K définit dans L une structure de corps, c'est-à-dire si c'est un sous-anneau, et si l'inverse d'un élément non nul de L reste dans L.

$(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$. $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un sous-corps de $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Pour qu'une partie non vide L d'un corps K soit un sous-corps de K, il faut et il suffit que $1 \in L$ et que :

$$\begin{cases} \forall x \in L \quad \forall y \in L \quad x - y \in L \quad \text{et} \quad xy \in L \\ \forall x \in L^* \quad x^{-1} \in L^* \qquad \text{où} \;\; L^* = L \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Déterminant et comatrice

Formes multilinéaires alternées

Ici dans cette fiche, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et n un entier naturel non nul. Une application f, de E^n dans $\mathbb{K}$, est une **forme n-linéaire** si chacune de ses n applications partielles

$$x_i \mapsto f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \text{ est linéaire.}$$

Définition

L'application f est **alternée** si $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ dès que deux des vecteurs x_i sont égaux.

Propriété

f étant une forme n-linéaire alternée, σ une permutation appartenant à $\mathcal{S}_n$, de signature $\varepsilon(\sigma)$ (voir Fiche 2 de cet ouvrage), on a :

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n)\, \varepsilon(\sigma).$$

Cas où dim $E = n$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
Pour toute base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et tout $l \in \mathbb{K}$, il existe une forme n-linéaire alternée unique f telle que :

$$f(e_1, \ldots, e_n) = l.$$

f étant une forme n-linéaire alternée non nulle, on a :

$$(x_1, \ldots, x_n) \text{ famille liée de } E \iff f(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Déterminants

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Déterminant de n vecteurs

On appelle **déterminant** relativement à la base $\mathcal{B}$ de E, l'unique forme n-linéaire alternée qui envoie le n-uplet des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ écrits dans l'ordre de la base $\mathcal{B}$ sur 1.

Notation : cette forme n-linéaire est notée $\det_{\mathcal{B}}$. Par conséquent, on a :

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_n) = 1.$$

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on décompose x_i sous la forme :

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, e_j,$$

alors

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \times a_{1,\sigma(1)} \times \cdots \times a_{n,\sigma(n)}.$$

Déterminant d'une matrice carrée

On rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ (voir la Fiche 5 dans Mathématiques Licence 1, Exercices et méthodes, Dunod). Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **déterminant de** A le déterminant de ses n vecteurs colonnes.

Déterminant d'un endomorphisme

Sachant que deux matrices semblables ont le même déterminant, on appelle **déterminant d'un endomorphisme** f, le déterminant (voir la Fiche 8 dans Mathématiques Licence 1, Exercices et méthodes, Dunod) commun à ses matrices représentatives.

Calcul pratique du déterminant

Proposition

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Le **déterminant** de A est l'élément de $\mathbb{K}$ défini par :

$$\det(A) = ad - bc.$$

Remarque : si $A = (\alpha)$ où $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $\det(A) = \alpha$.

Définitions

Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geqslant 2$.

$\hat{A}_{i,j}$ est la matrice obtenue à partir de la matrice A en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. La matrice $\hat{A}_{i,j}$ est donc une matrice carrée d'ordre $(n-1)$.

Le **mineur de** $a_{i,j}$ est $\det\left(\hat{A}_{i,j}\right)$.

Le **cofacteur de** $a_{i,j}$ est $\operatorname{cof}(a_{i,j}) = C_{i,j}(A) = (-1)^{i+j} \times \det\left(\hat{A}_{i,j}\right)$.

La **comatrice de** A est la matrice dont le coefficient à la place (i, j) est $C_{i,j}(A)$.

$$\operatorname{comat}(A) = \begin{pmatrix} C_{1,1}(A) & C_{1,2}(A) & \dots & C_{1,n-1}(A) & C_{1,n}(A) \\ C_{2,1}(A) & C_{2,2}(A) & \dots & C_{2,n-1}(A) & C_{2,n}(A) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C_{n-1,1}(A) & C_{n-1,2}(A) & \dots & C_{n-1,n-1}(A) & C_{n-1,n}(A) \\ C_{n,1}(A) & C_{n,2}(A) & \dots & C_{n,n-1}(A) & C_{n,n}(A) \end{pmatrix}.$$

Le **déterminant de** A peut également se calculer par la formule suivante :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} \times C_{i,1}(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{i,1} \times \det\left(\hat{A}_{i,1}\right),$$

on dit qu'on développe le déterminant suivant la première colonne.

Il est noté :

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Proposition

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $n \geqslant 2$. On a :

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA).$$

Proposition

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et A_1 la matrice obtenue en intervertissant deux lignes de A ou deux colonnes de A. Alors, on a :

$$\det(A_1) = -\det(A).$$

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On peut aussi calculer $\det(A)$ en développant le déterminant suivant la $j^{\text{ème}}$ colonne, c'est-à-dire en prenant la somme pondérée par les cofacteurs des coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

$$\forall j \in \{1,\ldots,n\}, \quad \det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} C_{i,j}(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det\left(\hat{A}_{i,j}\right).$$

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors on a :

$$\det(A) = \det({}^tA).$$

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On peut aussi calculer $\det(A)$ en développant le déterminant suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne, c'est-à-dire en prenant la somme pondérée par les cofacteurs des coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne.

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \quad \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} C_{i,j}(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det\left(\hat{A}_{i,j}\right).$$

Proposition

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in \mathbf{N}$.

i) Soit A_2 la matrice obtenue à partir de A en ajoutant/retranchant à la $j^{\text{ème}}$ colonne de $C_{A,j}$ une combinaison linéaire des **autres** colonnes. Alors, on a :

$$\det(A) = \det(A_2).$$

ii) Soit A_3 la matrice obtenue à partir de A en ajoutant/retranchant à la $i^{\text{ème}}$ ligne $L_{A,i}$ une combinaison linéaire des **autres** lignes. Alors, on a :

$$\det(A) = \det(A_3).$$

Proposition

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Soit A_4 la matrice obtenue à partir de A en multipliant la $j^{\text{ème}}$ colonne $C_{A,j}$ par λ.

$$\det(A_4) = \lambda \times \det(A).$$

2. Soit A_5 la matrice obtenue à partir de A en multipliant la $i^{\text{ème}}$ ligne $L_{A,i}$ par λ.

$$\det(A_5) = \lambda \times \det(A).$$

Proposition

Soit A une matrice carrée d'ordre n, diagonale ou triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure. Alors, le déterminant de la matrice A est égal au produit des termes diagonaux de A, c'est-à-dire :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i} = a_{1,1} \dots a_{n,n}.$$

Proposition : la règle de Sarrus (publiée dans l'article « Nouvelles méthodes pour la résolution des équations » à Strasbourg en 1833)

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. La **règle de Sarrus** consiste à écrire les trois colonnes de A et à répéter dans l'ordre, les deux premières lignes en dessous de A. Il suffit alors, pour obtenir la valeur du déterminant de A, d'effectuer les produits des coefficients de chaque diagonale et d'en faire la somme si la diagonale est descendante ou la différence si la diagonale est ascendante. La Figure 1.1 est une illustration graphique de cette règle. On peut aussi donner la formule par le calcul du déterminant de la matrice :

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{13}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

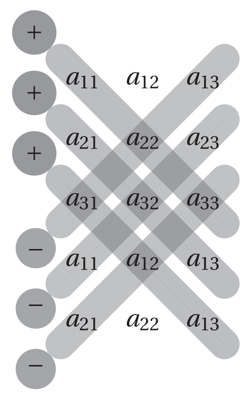


Figure 1.1 Règle de Sarrus

Déterminant et matrice inverse

Proposition

Soient A une matrice carrée $n \times n$ inversible, et A^{-1} son inverse. Alors, on a :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Remarque : cette proposition implique en particulier que le déterminant d'une matrice inversible n'est jamais nul.

Théorème

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est non inversible $\iff$ $\det(A) = 0$ $\iff$ les n vecteurs colonnes de A sont liés.

Le déterminant peut servir à vérifier si une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ est inversible ou non.

Théorème
Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible $\iff$ $\det(A) \neq 0$.
Remarques :

1. Le déterminant permet de calculer le rang d'une matrice. En effet, le rang d'une matrice A est égal à la taille de la plus grande matrice carrée inversible extraite de la matrice A. Par suite, le rang de A est égal à la taille du plus grand déterminant non nul extrait de la matrice A.
2. $\operatorname{rg} A = 0$ signifie que $A = 0_{m,n}$.
3. $\operatorname{rg} A = 1$ signifie que les n vecteurs $\operatorname{rg} A_1, \ldots, \operatorname{rg} A_n$ sont colinéaires.
4. Soit B la matrice carrée d'ordre k ($k \leqslant \min\{n, m\}$) obtenue en extrayant les lignes $i_1, \ldots, i_k$ et les colonnes $j_1, \ldots, j_k$ de A. Si $\det(B) \neq 0$, alors :
   les lignes $L_{A,i_1}, \ldots, L_{A,i_k}$ forment une partie libre de $\mathbb{K}^n$;
   les colonnes $C_{A,j_1}, \ldots, C_{A,j_k}$ forment une partie libre de $\mathbb{K}^m$.

Théorème
Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. On a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times \left({}^t \operatorname{comat}(A) \right).$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Interprétations géométriques du déterminant

Théorème
Soit une matrice à coefficients réels d'ordre 2, notée $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$. On considère les deux vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées données par les deux colonnes de la matrice :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs déterminent un parallélogramme. Alors, l'**aire du parallélogramme** est égale à la valeur absolue du déterminant de la matrice A.

Théorème
Soit une matrice à coefficients réels d'ordre 3, notée $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$. On considère les trois vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$ de coordonnées données par les trois colonnes de la matrice :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

Le produit mixte de ces trois vecteurs, noté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, est égal à : $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$.

Ces trois vecteurs déterminent un parallélépipède. Alors, le **volume du parallélépipède** est égal à la valeur absolue du déterminant de la matrice A.

Fiche 5

Opérations matricielles par blocs

Dans certaines situations, il est intéressant d'utiliser des matrices partitionnées par blocs. Les opérations classiques sur les matrices s'étendent aux matrices partitionnées par blocs, à condition de respecter les formats et l'ordre dans lequel viennent les facteurs dans les multiplications matricielles.

Matrices par blocs

Le cas le plus simple de partitionnement par blocs de matrice est l'écriture en lignes ou en colonnes.

Définition

Une matrice A est **partitionnée par blocs** si elle s'écrit de la manière suivante :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n_1 & \cdots & n_k \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_1^1 & \cdots & A_1^k \\ \vdots & & \vdots \\ A_l^1 & \cdots & A_l^k \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ m_1 \\ \vdots \\ m_l \end{array}$$

où A_i^j est une matrice de $\mathcal{M}_{n_j,m_i}(\mathbb{K})$, appelée bloc (i,j) ou sous-matrice (i,j) de la matrice A.

Addition par blocs

Soient deux matrices par blocs, partitionnées de la même façon :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n_1 & \cdots & n_k \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_1^1 & \cdots & A_1^k \\ \vdots & & \vdots \\ A_l^1 & \cdots & A_l^k \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ m_1 \\ \vdots \\ m_l \end{array}, \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n_1 & \cdots & n_k \end{array} \\ \begin{pmatrix} B_1^1 & \cdots & B_1^k \\ \vdots & & \vdots \\ B_l^1 & \cdots & B_l^k \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ m_1 \\ \vdots \\ m_l \end{array}.$$

La somme des deux matrices A et B est une matrice C de même partition :

$$C = A + B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n_1 & \cdots & n_k \end{array} \\ \begin{pmatrix} C_1^1 & \cdots & C_1^k \\ \vdots & & \vdots \\ C_l^1 & \cdots & C_l^k \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ m_1 \\ \vdots \\ m_l \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n_1 & \cdots & n_k \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_1^1 + B_1^1 & \cdots & A_1^k + B_1^k \\ \vdots & & \vdots \\ A_l^1 + B_l^1 & \cdots & A_l^k + B_l^k \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ m_1 \\ \vdots \\ m_l \end{array}.$$

Multiplication par blocs

Soient deux matrices par blocs, partitionnées de la même façon :

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} n_1 & \cdots & n_j \end{array} & \\ \begin{pmatrix} A_1^1 & \cdots & A_1^j \\ \vdots & & \vdots \\ A_i^1 & \cdots & A_i^j \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m_1 \\ \vdots \\ m_i \end{array} \end{array}, \qquad B = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} p_1 & \cdots & p_k \end{array} & \\ \begin{pmatrix} B_1^1 & \cdots & B_1^k \\ \vdots & & \vdots \\ B_j^1 & \cdots & B_j^k \end{pmatrix} & \begin{array}{c} n_1 \\ \vdots \\ n_j \end{array} \end{array}.$$

Si la matrice produit $C = AB$ est partitionnée de la façon suivante :

$$C = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} p_1 & \cdots & p_k \end{array} & \\ \begin{pmatrix} C_1^1 & \cdots & C_1^k \\ \vdots & & \vdots \\ C_i^1 & \cdots & C_i^k \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m_1 \\ \vdots \\ m_i \end{array} \end{array}$$

alors, pour tous entiers $1 \leqslant r \leqslant i$ et $1 \leqslant s \leqslant k$, on a :

$$C_r^s = \sum_{t=1}^{j} A_r^t B_t^s.$$

Remarque : dans cette écriture, A_r^t et B_t^s ne commutent pas toujours donc l'ordre $A_r^t B_t^s$ doit être gardé tel quel.
En particulier, on a par exemple :

$$C_1^1 = A_1^1 B_1^1 + A_1^2 B_2^1 + \cdots + A_1^j B_j^1.$$

Déterminant et matrices carrées par blocs

Matrice diagonale par blocs

Une **matrice** carrée partitionnée par blocs est dite **diagonale par blocs** si elle est partitionnée ainsi :

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_{k-1} & n_k \end{array} & \\ \begin{pmatrix} A_1^1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k-1}^{k-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_k^k \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{k-1} \\ m_k \end{array} \end{array},$$

c'est-à-dire si tous les blocs sont nuls sauf éventuellement ceux situés sur la diagonale.

Déterminant d'une matrice diagonale par blocs

Si une matrice carrée A est diagonale par blocs et que ses blocs diagonaux sont carrés alors le déterminant de A est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux de A.

$$\det A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_{k-1} & n_k \end{array} & \\ \begin{vmatrix} A_1^1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k-1}^{k-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_k^k \end{vmatrix} & \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_{k-1} \\ n_k \end{array} \end{array} = \det A_1^1 \det A_2^2 \cdots \det A_{k-1}^{k-1} \det A_k^k.$$

Remarque : il ne faut pas oublier que toutes les matrices et tous les blocs apparaissant dans les déterminants doivent être carrés pour que les déterminants existent.

Matrice triangulaire supérieure par blocs

Une **matrice** carrée partitionnée par blocs est dite **triangulaire supérieure par blocs** si elle est partitionnée ainsi :

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_{k-1} & n_k \end{array} & \\ \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \cdots & \cdots & A_1^k \\ 0 & A_2^2 & A_2^3 & \cdots & A_2^k \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k-1}^{k-1} & A_{k-1}^k \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_k^k \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{k-1} \\ m_k \end{array} \end{array},$$

c'est-à-dire si tous les blocs sont nuls sauf éventuellement ceux situés au-dessus de la diagonale.

Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure par blocs

Si une matrice carrée A est triangulaire supérieure par blocs et que ses blocs diagonaux sont carrés alors le déterminant de A est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux de A.

$$\det A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_{k-1} & n_k \end{array} & \\ \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \cdots & \cdots & A_1^k \\ 0 & A_2^2 & A_2^3 & \cdots & A_2^k \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k-1}^{k-1} & A_{k-1}^k \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_k^k \end{vmatrix} & \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_{k-1} \\ n_k \end{array} \end{array} = \det A_1^1 \det A_2^2 \cdots \det A_{k-1}^{k-1} \det A_k^k.$$

Remarque : il ne faut pas oublier que toutes les matrices et blocs apparaissant dans les déterminants doivent être carrés pour que tous les déterminants existent.

Matrice triangulaire inférieure par blocs

Une **matrice** carrée partitionnée par blocs est dite **triangulaire inférieure par blocs** si elle est partitionnée ainsi :

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_{k-1} & n_k \end{array} & \\ \begin{pmatrix} A_1^1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ A_2^1 & A_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A_{k-1}^1 & \cdots & A_{k-1}^{k-2} & A_{k-1}^{k-1} & 0 \\ A_k^1 & \cdots & \cdots & A_k^{k-1} & A_k^k \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{k-1} \\ m_k \end{array} \end{array},$$

c'est-à-dire si tous les blocs sont nuls sauf éventuellement ceux situés en-dessous de la diagonale.