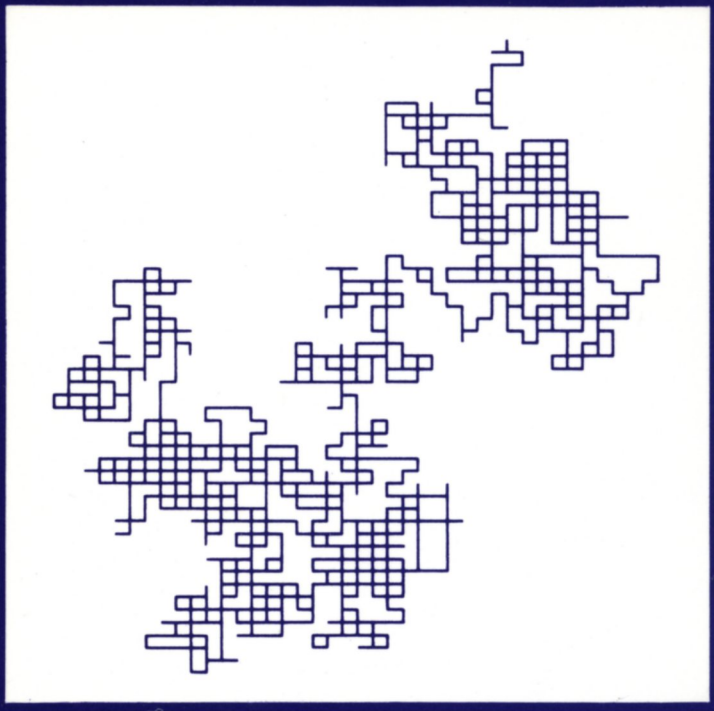
Claude Itzykson · Jean-Michel Drouffe

Théorie statistique des champs 2



SAVOIRS ACTUELS

InterEditions/Editions du CNRS

Théorie statistique des champs
2

Claude Itzykson · Jean-Michel Drouffe

Théorie statistique des champs
2

SAVOIRS ACTUELS

InterEditions/Editions du CNRS

© 1989, **InterEditions**, 25, rue Leblanc, 75015 Paris.
et
Editions du CNRS, 1, Place Aristide Briand, 92195 Meudon.

Tous droits réservés. Aucun extrait de ce livre ne peut être reproduit, sous quelque forme ou par quelque procédé que ce soit (machine électronique, mécanique, à photocopier, à enregistrer ou tout autre) sans l'autorisation écrite préalable de InterEditions.

ISBN 2-7296-0327-1
ISBN 2-222-04365-4

TABLE DES MATIERES

Avant-propos IX

Chapitre VII – **METHODES DIAGRAMMATIQUES** 1

1. Techniques générales 1
1.1 Définitions et notations 1
1.2 Graphes connexes et cumulants 6
1.3 Irréductibilité et transformation de Legendre 10
2. Développements en série 16
2.1 Développement de haute température 16
2.2 Le rôle des symétries 21
2.3 Développements de basse température – cas discret 24
2.4 Développement de basse température – cas continu 27
2.5 Développement en champ fort 31
2.6 Champs fermioniques 31
3. Enumération de graphes 33
3.1 Nombres de configurations 33
3.2 Graphes multiplement connexes 35
4. Résultats et analyse 39
4.1 Techniques d'analyse des séries 39
4.2 Un exemple 43
Notes 47

Chapitre VIII – **SIMULATIONS NUMERIQUES** 49

1. Algorithmes 49
1.1 Généralités 49
1.2 Algorithmes classiques 53
1.3 Simulations microcanoniques 57
1.4 Considérations pratiques 58
1.4.1 Conditions aux limites 58
1.4.2 Taille du réseau 60
1.4.3 Temps de thermalisation 61
1.4.4 Mesure des observables 62

1.4.5 Erreurs statistiques 62
1.4.6 Paramétrisation des champs 63
2. Mesures 65
2.1 Détermination des transitions 65
2.2 Effets de taille finie 68
2.3 Méthode de renormalisation Monte Carlo 71
2.4 Equation de Langevin 76
3. Simulations fermioniques 79
3.1 Approximation des variables fermioniques gelées 80
3.2 Fermions dynamiques 82
3.3 Spectre hadronique 83
Notes 88

Chapitre IX – **INVARIANCE CONFORME** 89

1. Tenseur impulsion-énergie – Algèbre de Virasoro 90
1.1 Invariance conforme 90
1.2 Tenseur impulsion-énergie 94
1.3 Transformations conformes en deux dimensions 96
1.4 Charge centrale 101
1.5 Algèbre de Virasoro 107
1.6 Les déterminants de Kac 118
1.7 Représentations unitaires et minimales 129
1.8 Caractères de l'algèbre de Virasoro 133
2. Exemples 135
2.1 Modèle gaussien 135
2.2 Modèle d'Ising 139
2.3 Modèle de Potts à trois états 142
3. Invariance modulaire 148
3.1 Fonction de partition sur un tore 149
3.2 Formule limite de Kronecker 152
3.3 Modèle d'Ising 158
3.4 La classification A–D–E des modèles minimaux 163
3.5 Frustrations et symétries discrètes 172
3.6 Modèles non minimaux 175
3.7 Fonctions de corrélation dans un demi-plan 182
3.8 Le voisinage du point critique 186
Appendice A. Séries et produits θ de Jacobi 192
Appendice B. Algèbre super-conforme 196
Appendice C. Algèbre des courants 201
C.1 Algèbres de Lie simples 202
C.2 Modèles de Wess–Zumino–Witten 209
C.3 Représentations et caractères des algèbres de Kac–Moody 220
Notes 224

Chapitre X – **SYSTEMES DESORDONNES ET METHODES FERMIONIQUES** 229

1. Modèles unidimensionnels 229
1.1 Le potentiel aléatoire gaussien 229
1.2 Equation de Fokker–Planck 232
1.3 La méthode des répliques 240
1.4 Réseau aléatoire unidimensionnel 246
2. Gaz bidimensionnel d'électrons en présence d'un champ magnétique 256
2.1 Niveaux de Landau – L'effet Hall quantique 256
2.2 Spectre à une particule en présence d'impuretés 260
3. Matrices aléatoires 269
3.1 Loi du demi-cercle 271
3.2 Méthode fermionique 274
3.3 Espacements des niveaux 277
4. Approximation planaire 283
4.1 Analyse combinatoire 284
4.2 Approximation planaire en mécanique quantique 292
5. Système de spins en interactions aléatoires 295
5.1 Champ extérieur aléatoire et transmutation dimensionnelle 295
5.2 Modèle d'Ising bidimensionnel désordonné 298
Appendice A. La conductivité de Hall en tant qu'invariant topologique 308
Notes 313

Chapitre XI – **GEOMETRIE ALEATOIRE** 317

1. Réseaux aléatoires 317
1.1 Réseaux poissonniens et statistique locale 318
1.2 Equations des champs discrétisées 332
1.3 Spectre du laplacien 339
2. Surfaces aléatoires 343
2.1 Surfaces triangulées 343
2.2 Anomalie conforme et action de Liouville 351
2.3 Sommes sur des surfaces régulières 358
2.4 Modèles discrets 377
Notes 386

INDEX 389

Avant-propos

La théorie quantique des champs vise à décrire les interactions fondamentales dans un cadre unique conciliant les principes de la mécanique quantique et les invariances géométriques et cinématiques. Cette discipline s'est enrichie, au cours des deux dernières décennies, d'applications insoupçonnées, qui tiennent à la parenté de ses méthodes avec celles de la physique statistique, à travers l'étude des phénomènes critiques ou des modèles de physique du solide. Certains développements ont permis de s'affranchir en partie des techniques perturbatives, qui sont à la source de succès considérables dans le domaine des interactions électromagnétiques et faibles. En jetant un jour nouveau sur le rôle du groupe de renormalisation, en permettant d'aborder des questions comme le confinement des constituants dans la chromodynamique, en s'ouvrant aux possibilités de simulation numérique, en découvrant des problèmes nouveaux comme ceux posés par la théorie des cordes quantiques, la théorie des champs s'est entièrement renouvelée.

Nous nous sommes attachés à en donner un panorama complétant un texte précédent sur la théorie quantique des champs écrit par l'un des auteurs en collaboration avec J.-B. Zuber. Bien qu'on suppose du lecteur qu'il possède quelques rudiments de cette théorie, le présent ouvrage veut éviter de faire de trop nombreux appels à des connaissances extérieures et s'inscrit dans le cadre d'un enseignement destiné à de jeunes chercheurs et, plus généralement, à des scientifiques intéressés par les progrès de cette discipline. L'abondance des matières, le rythme rapide des nouvelles contributions et les compétences limitées des auteurs ont cependant posé des bornes à l'ensemble des sujets traités.

Si l'on veut bien admettre ces limites, nous avons cependant tenté de décrire les fondements de la théorie euclidienne des champs, reposant sur l'usage des intégrales de chemins de Feynman et concrètement réalisée à travers les modèles statistiques qui utilisent un réseau discret, dont le paradigme est le modèle d'Ising. Ce point de vue permet d'attribuer un sens global aux quantités physiques, d'étudier des régimes de couplage fort, suggère l'existence de transitions de phases et montre le rôle du groupe de renormalisation agissant comme filtre des propriétés universelles au voisinage des théories critiques continues.

Le premier volume est consacré pour l'essentiel à l'illustration de ces thèmes. Il s'ouvre par une étude des chemins aléatoires et leur relation avec les champs bosoniques, et introduit les intégrales fermioniques sur l'exemple du modèle d'Ising bidimensionnel. Il expose la méthode du champ moyen, les propriétés relatives à l'invariance d'échelle, et illustre les idées de la renormalisation dans le cadre de la transition de Kosterlitz et Thouless du modèle des rotateurs. Un long chapitre est consacré à la théorie des transitions de phases continues à partir des idées de Wilson, où nous nous sommes appuyés sur les contributions de nos collègues E. Brézin, J.-C. Le Guillou et J. Zinn-Justin. C'est encore à Wilson qu'on doit la formulation des théories de champs de jauge sur réseau et leurs applications à la chromodynamique et au confinement dont la présentation clôt la première partie.

Le second volume est plus éclectique. On y trouve d'abord des indications sur les développements de haute ou basse température et les applications des simulations numériques de Monte Carlo, en particulier à la chromodynamique. Un copieux chapitre décrit les résultats récents concernant les systèmes critiques bidimensionnels, dans le cadre des théories conformes, qui servent aussi d'outil à la théorie des cordes quantiques. Nous discutons ensuite les applications de l'intégration fermionique à des systèmes désordonnés simples. Enfin le dernier chapitre expose quelques résultats de géométrie aléatoire et introduit l'étude des surfaces fluctuantes.

Dans la première partie, au risque de répétitions, nous nous sommes efforcés de présenter le sujet de manière aussi élémentaire que possible. Nous ne supposons du lecteur qu'une certaine familiarité avec la notion de poids statistique de Gibbs, ainsi qu'avec la représentation des amplitudes de transition quantiques comme superpositions relatives à toutes les évolutions possibles, affectées d'un poids exponentiel dans l'action. C'est précisément ce parallélisme qui est à la source des convergences évoquées précédemment.

Le choix des sujets traités et les nombreuses omissions reflètent les intérêts des auteurs et leurs préoccupations. Nous ne sommes que trop conscients de nombreuses lacunes dont la liste serait à l'origine d'un texte encore plus volumineux. Il est quelque peu dangereux de vouloir systématiser ce que l'on a cru comprendre sans laisser percer de-ci de-là des ignorances. Il est bon de comprendre à quel point la recherche débouche sur des problèmes ouverts, des questions en suspens, des interrogations. Comprendre nécessite le plus souvent que l'on reprenne la plume, que l'on retrace les étapes d'un raisonnement, que l'on refasse un calcul, que d'une façon générale on ne se satisfasse jamais de ce que l'on trouve écrit ou dit ici et là.

Malgré tous nos efforts, et ils s'étalent hélas sur une trop longue période, il nous a été difficile, voire impossible, de polir suffisamment notre texte pour éviter les notations conflictuelles, fruit de l'usage, les erreurs matérielles, voire les erreurs tout court. Comme il est rituel, nous invitons le lecteur patient à les redresser et à nous en faire part. Nous espérons cependant que ces défauts inévitables ne nuisent pas trop à la compréhension de

l'ouvrage, même si une quantité change parfois de symbole de chapitre en chapitre, ou si la même lettre désigne dans des paragraphes voisins deux entités distinctes.

Nous avons inclus des passages en petits caractères, concernant des compléments, des explications et quelquefois des exercices, le plus souvent résolus. En outre, quelques appendices constituent de (trop) brefs résumés de sujets qu'il n'était pas possible de présenter en détail. Enfin des notes bibliographiques complètent chacun des chapitres et sont destinées à indiquer nos sources, fournir des jalons, et surtout à encourager le lecteur à poursuivre son étude dans les articles originaux ou de revue. Ces notes sont évidemment très incomplètes.

Parmi les textes qui servent de références, figurent bien entendu ceux de la série publiée par C. Domb et M.S. Green, et maintenant J. Lebowitz, intitulée *Phase Transitions and Critical Phenomena*, publiée par Academic Press (New York). En ce qui concerne la mécanique statistique, citons K. Huang, *Statistical Mechanics*, J. Wiley and Sons, New York (1963), H.E. Stanley *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, Oxford University Press (1971), S.K. Ma *Modern Theory of Critical Phenomena*, Benjamin New York (1976) et *Statistical Mechanics*, World Scientific, Singapour (1985), D.J. Amit *Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena*, World Scientific, Singapour (1984).

Tandis que nous préparions cette édition sont venus s'ajouter plusieurs ouvrages traitant des mêmes sujets. Il s'agit tout d'abord du livre de M. Le Bellac *Des phénomènes critiques aux champs de jauge, une introduction aux méthodes et aux applications de la théorie quantique des champs*, publié dans la même collection par InterEditions, Editions du CNRS Paris (1988) et de ceux de G. Parisi *Statistical Field Theory*, Addison Wesley, New York (1988) et S. Polyakov *Gauge Fields and Strings*, Harwood (1988). Enfin un traité de J. Zinn-Justin devrait paraître sous peu.

La référence classique où l'on trouve un traitement des intégrales de chemins est R.P. Feynman et A.R. Hibbs *Quantum Mechanics and Path Integrals*, Mc Graw Hill, New York (1965). Des aspects variés sont discutés dans C. Itzykson et J.-B. Zuber *Quantum Field Theory*, Mc Graw Hill, New York (1980), P. Ramond *Field Theory, A Modern Primer*, Benjamin, Cummings, Reading, Mass. (1981), J. Glimm et A. Jaffe *Quantum Physics*, Springer, New York (1981). De nombreux progrès récents de la théorie des champs qui n'ont pas trouvé place dans notre traitement sont présentés dans S. Coleman *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press (1985), S. Treiman, R. Jackiw, B. Zumino et E. Witten *Current Algebra and Anomalies*, World Scientific, Singapour (1985). Pour s'initier aux systèmes intégrables, on consultera R. Baxter *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, New York (1982) et M. Gaudin *La Fonction d'Onde de Bethe*, Masson, Paris (1983). Bien entendu cette liste n'est qu'indicative et l'on trouve de nombreuses autres références dans les notes.

L'un des auteurs (C.I.) remercie ses collègues qui lui ont fourni l'occasion d'enseigner des parties de cet ouvrage dans le cadre du Troisième cycle de Suisse Romande à Lausanne, du Département de Physique de l'Université de Louvain la Neuve, du Troisième cycle de Physique Théorique à Marseille et à Paris, où les deux auteurs ont eu l'opportunité de participer à l'enseignement. Nos remerciements vont aux secrétaires de ces institutions qui ont pris part à la frappe des divers textes préliminaires, ainsi qu'à toutes celles et tous ceux qui ont permis la réalisation finale, à Dany Bunel et Sylvie Zaffanella qui ont eu la lourde charge de mettre au point le manuscrit, à M. Leduc qui a accueilli ce livre dans sa collection.

Nous remercions chaleureusement les chercheurs et amis du Service de Physique Théorique à Saclay qui au cours des années ont été nos interlocuteurs et collaborateurs et qui sont trop nombreux pour être tous cités ici.

Enfin le Commissariat à l'Energie Atomique et son Institut de Recherche Fondamentale nous ont toujours offert des conditions de travail d'une qualité difficile à égaler. C'est en quelque sorte témoigner de notre gratitude que de dédier ce livre aux futurs chercheurs. C'est aussi la raison pour laquelle nous sommes heureux de bénéficier d'une édition française grâce au concours du Centre National de la Recherche Scientifique. Bien souvent il nous est arrivé d'hésiter sur une formulation, simplement parce que nous avions perdu l'habitude de nous exprimer dans notre langue et que nous cherchions un précédent impossible à trouver, tant la langue anglaise a fini par envahir toutes les publications dans notre domaine. S'il n'est pas souhaitable de retourner à l'époque de la tour de Babel et si l'on ne peut espérer revenir aux siècles où le français était une langue scientifique universelle, du moins peut-on souhaiter maintenir un vocabulaire et une capacité d'exprimer les idées contemporaines dans sa propre langue. Sans prétendre aux effets de style, nous nous sommes attachés à trouver une terminologie simple qui puisse rendre compte de concepts nouveaux et nous nous associons à tous les efforts, heureusement de plus en plus nombreux, pour maintenir une langue scientifique vivante.

Saclay, Février 1989

Avertissement

Dans cet ouvrage, nous avons utilisé les notations internationales. Ainsi, les nombres décimaux ont un point décimal plutôt qu'une virgule, ln représente le logarithme népérien, tan la tangente, sinh, cosh, tanh les lignes hyperboliques, etc.

CHAPITRE VII

METHODES DIAGRAMMATIQUES

Ce chapitre est consacré aux aspects techniques de divers développements déjà rencontrés dans le premier volume. Nous examinerons surtout ceux qui sont reliés à la formulation des modèles sur réseau, à haute ou basse température, ou à couplage fort. Nous n'explorerons pas de façon très approfondie le vaste domaine de la théorie des graphes, mais nous donnerons plutôt des exemples empruntés aux modèles les plus courants. Il existe cependant de nombreux traits communs de nature topologique qui sont manifestes dans des développements variés. Il est bon de les souligner malgré le caractère en apparence élémentaire des procédures employées.

1. Techniques générales

1.1 Définitions et notations

Un *graphe étiqueté* $\mathcal{G}$ est une collection de v éléments d'un ensemble d'indices et de l paires de ces éléments, avec des répétitions possibles (liens multiples). Nous utiliserons aussi le mot *diagramme* au lieu de graphe. Cet objet abstrait sera représenté par le dessin de v points (ou sommets) reliés par l lignes. A chaque sommet est associé la valeur de son indice.

Suivant le problème considéré, on ne retiendra qu'une partie de l'ensemble de tous les graphes possibles. A chacun de ces graphes *admissibles*, on fait correspondre un poids $\omega(\mathcal{G})$ (nombre réel ou complexe) par un ensemble de règles. On veut évaluer la somme des poids de tous les graphes admissibles.

Parmi les restrictions que l'on sera amené à considérer, citons

(i) la *contrainte d'exclusion* qui interdit à deux sommets de porter le même indice,

(ii) la *simplicité*, lorsque deux sommets ne sont reliés que par une ligne au plus (le graphe de la figure 1(a) n'est pas simple).

Par exemple, la série de haute température de la fonction de partition du modèle d'Ising

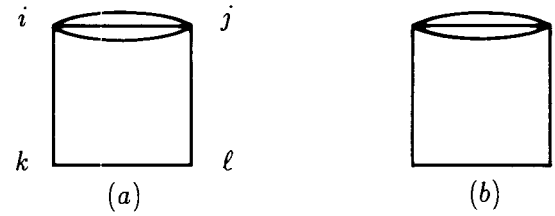


Figure 1 : (*a*) Un graphe étiqueté. (*b*) Le graphe libre correspondant.

$$\begin{aligned} Z &= 2^{-N} \sum_{\{\sigma_i=\pm 1\}} \exp\left(\beta \sum_{\langle ij\rangle} \sigma_i\sigma_j\right) \\ &= 2^{-N} \sum_{\{\sigma_i=\pm 1\}} \sum_{\langle ij\rangle} \left(1 + \sum_{n_{ij}=1}^{\infty} \frac{\beta^{n_{ij}}}{n_{ij}!}\sigma_i\sigma_j\right) \end{aligned} \tag{1}$$

est représentée par des graphes associés à chacun des termes du développement du produit, caractérisés par un ensemble d'entiers $\{n_{ij}\}$. Le graphe sera constitué de n_{ij} lignes joignant les points i et j. Les points isolés ne seront pas dessinés. La sommation terme à terme sur les configurations $\{\sigma_i = \pm 1\}$ revient à retenir les termes où chaque σ_i n'apparaît qu'à une puissance paire. Ainsi les graphes admissibles sont déterminés par les conditions suivantes

(i) une ligne ne peut joindre que deux points indexés par des sites voisins (le graphe est dessiné sur le réseau)

(ii) le nombre de lignes incidentes en chaque sommet est pair

(iii) deux sommets distincts ont des indices distincts (contrainte d'exclusion).

Le poids associé est évalué en attribuant un facteur β à chaque ligne et en divisant le résultat par $\prod_{\langle i,j\rangle} n_{ij}!$, ordre du groupe de symétrie du graphe par échange de ses lignes.

Nous avions aussi écrit

$$Z = (\cosh\beta)^{Nd} \frac{1}{2^N} \sum_{\{\sigma_i=\pm 1\}} \prod_{\langle ij\rangle} (1 + \sigma_i\sigma_j \tanh\beta) \tag{2}$$

qui conduit à un autre développement pour $Z/(\cosh\beta d)^N$. Dans ce cas, les graphes doivent être simples, et leur poids est calculé en attribuant un facteur $\tanh\beta$ à chaque ligne. Les deux développements ont chacun leur intérêt et sont utilisés concurremment.

Deux graphes sont *isomorphes* s'il existe une correspondance bi-univoque entre leurs éléments, telle que deux lignes homologues joignent des points homologues. Ils ne diffèrent donc que par la valeur des indices des

sommets. Cet isomorphisme est une relation d'équivalence, et les classes correspondantes, notées G, sont appelées *graphes libres*. Leur représentation (figure 1(b)) ne comporte plus d'indices. Conventionnellement, le poids $\omega(G)$ du graphe libre G est la moyenne des poids de tous les graphes isomorphes correspondants. Appelons *nombre de configurations* $n(G)$ d'un graphe libre G le nombre des graphes étiquetés correspondants; on a alors

$$\sum_{\mathcal{G}_i \in G} \omega(\mathcal{G}_i) = n(G)\omega(G) \tag{3}$$

Cette notion est particulièrement utile lorsque le poids d'un graphe ne dépend pas de ses indices, puisque les règles de calcul des poids des graphes étiquetés s'étendent immédiatement aux graphes libres. Cependant, son principal intérêt est de séparer l'influence du modèle ou du type de modèle considéré (évaluation de $\omega(G)$) des contraintes dues à la géométrie du réseau (dont dépend $n(G)$). Les sections 2 et 3 de ce chapitre traitent successivement ces deux problèmes.

Les graphes ainsi introduits peuvent être généralisés dans diverses directions. Ainsi,

(i) on peut considérer plusieurs types de sommets,

(ii) les lignes peuvent être orientées,

(iii) une modification plus profonde consiste à étendre ces graphes unidimensionnels (collection de points de dimension 0 et de lignes de dimension 1) à des dimensions supérieures (dimension 2 pour les théories de jauge);

(iv) enfin les indices peuvent être composés, et une ligne pourra en porter à ses extrémités.

Cette liste n'est qu'indicative des extensions possibles.

Nous aurons besoin dans certaines applications (en particulier pour l'estimation des fonctions de corrélations) de conserver un indice sur un ou plusieurs sommets. Les classes de graphes isomorphes respectant cette contrainte sont appelées *graphes avec racines*.

Deux sommets x, y d'un graphe G sont *liés* s'il existe un chemin les joignant, c'est-à-dire une suite de liens du graphe xz_1, z_1z_2, ..., z_ny. On définit ainsi une relation d'équivalence entre sommets, et les classes correspondantes permettent de séparer le graphe en parties connexes. Un graphe *connexe* n'a qu'une seule partie connexe.

Il peut exister sur un graphe des *cycles* $(x_1, x_2, ..., x_n, x_1)$, c'est-à-dire des chemins fermés passant par n points distincts. Un graphe connexe sans cycle est un *arbre* (figure 2(a)). Le *nombre de boucles* d'un graphe est le nombre minimal de lignes qu'il faut ôter pour qu'il devienne un arbre (figure 2(b)).

Un *point d'articulation* (figure 2(c)) est tel que sa suppression (ainsi que celle des lignes qui lui sont incidentes) augmente le nombre de parties connexes du graphe. C'est donc un point de passage obligé pour les chemins

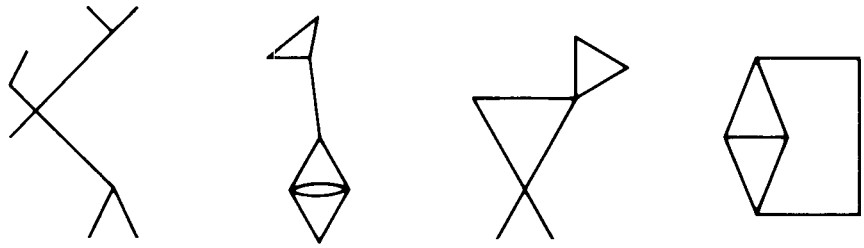


Figure 2 : (*a*) Un arbre. (*b*) Un graphe à quatre boucles. (*c*) Un graphe à deux points d'articulation. (*d*) Un graphe multiplement connexe.

joignant certaines paires de points. En particulier, tous les sommets non terminaux d'un arbre sont des points d'articulation. Un graphe sans points d'articulation (figure 2(*d*)) est appelé *graphe multiplement connexe*; deux quelconques de ses sommets sont sur un cycle et peuvent donc être reliés par deux chemins totalement distincts au moins.

Appelant

v_k, le nombre de sommets d'où partent k lignes

$v = \sum_k v_k$, le nombre total de sommets

l, le nombre de lignes

b, le nombre de boucles

c, le nombre de parties connexes d'un graphe

nous avons la relation

$$2l = \sum_k k v_k \tag{4}$$

En effet, puisque chaque lien joint deux sommets, la somme des sommets pondérée par le nombre de liens incidents est égale à deux fois le nombre de liens. Par ailleurs, la relation d'Euler

$$v + b = c + l \tag{5}$$

s'obtient par récurrence, en supprimant une à une les lignes du graphe jusqu'à obtention de v points isolés. A chaque étape, ou bien on diminue le nombre de boucles d'une unité, ou bien on augmente le nombre de parties connexes.

(i) Calculer explicitement jusqu'à l'ordre 4 la fonction de partition du modèle d'Ising sur un réseau hypercubique à d dimensions.

Les graphes libres admissibles ayant au plus 4 lignes sont représentés sur la figure 3. Leurs nombres de configurations, calculés pour un réseau fini de N points avec conditions aux limites périodiques, sont respectivement Nd, Nd, $Nd(2d-1)$, $\frac{1}{2}Nd(d-1)$ et $\frac{1}{2}Nd(Nd-4d+1)$. En tenant compte du

préfacteur de symétrie, les poids correspondants sont $\frac{1}{2}\beta^2$, $\frac{1}{24}\beta^4$, $\frac{1}{4}\beta^4$, β^4, $\frac{1}{4}\beta^4$. La sommation de ces différentes contributions conduit à

$$Z = 1 + \tfrac{1}{2}Nd\beta^2 + \left[\tfrac{1}{12}Nd(6d-7) + \tfrac{1}{8}N^2d^2\right]\beta^4 + \mathcal{O}(\beta^6) \tag{6}$$

A cet ordre, il est facile de vérifier l'extensivité de l'énergie libre. L'expression

$$-\frac{\beta\mathcal{F}}{N} = \frac{F}{N} = \frac{\ln Z}{N} = \tfrac{1}{2}d\beta^2 + \tfrac{1}{12}d(6d-7)\beta^4 + \mathcal{O}(\beta^6) \tag{7}$$

est en effet indépendante de N.

Figure 3 : Graphes du modèle d'Ising jusqu'à l'ordre β^4.

Notons qu'il était plus rapide d'utiliser le développement en $\tanh\beta$. En vertu de la contrainte de simplicité, seul le graphe de la figure 3(d) donne une contribution non nulle, ce qui conduit à la formule suivante, équivalente à (6) dans un développement à l'ordre β^4

$$Z = (\cosh\beta)^{Nd}[1 + \tfrac{1}{2}Nd(d-1)\tanh^4\beta + \mathcal{O}(\tanh^6\beta)] \tag{8}$$

Cette contrainte est donc bien utile dans ce cas pour réduire le nombre de graphes, qui prolifèrent rapidement avec l'ordre. Les sous-sections suivantes étudient d'autres techniques de réduction.

(ii) Théorème de Kirchoff. Les définitions précédentes nous permettent de rappeler un théorème dû à Kirchoff, donnant le nombre d'arbres distincts tracés sur un graphe connexe et joignant tous les sommets. Associons à un graphe connexe G sa matrice d'incidence Δ (qui est l'équivalent topologique du laplacien). Sur la diagonale principale, $(-\Delta)_{ii}$ est le nombre de liens incidents au sommet i, alors que $(-\Delta)_{ij}$ est l'opposé du nombre de liens joignant les sommets (distincts) i et j. Comme la somme des éléments de chaque ligne ou colonne est nulle, $\det(-\Delta)$ s'annule. Cela correspond à l'existence d'un mode nul, unique car le graphe est connexe. Le théorème stipule que tout mineur principal (c'est-à-dire $(-1)^{i+j}$ fois le déterminant de la matrice où l'on a supprimé la i-ième ligne et la j-ième colonne) est égal au nombre d'arbres recherché.

Le vecteur propre correspondant à l'unique mode nul a toutes ses composantes égales. Soit M_{ij} le mineur principal de l'élément ij (avec son signe). Puisque

$$\sum_j (-\Delta)_{ij} M_{kj} = \delta_{ik} \det(-\Delta) = 0$$

tous les M_{kj}, à k fixé, sont égaux. Comme la matrice est symétrique, on en déduit que le résultat s'étend à toute valeur de k, tout mineur étant égal à la même valeur M. Il nous suffit donc d'évaluer $M = M_{11}$. Soit v le nombre de sommets et $\ell \geq v - 1$ le nombre de liens. Introduisons la matrice $L_{\alpha i}$ de dimension $l \times v$, où α indexe les liens et i les sommets, après avoir orienté arbitrairement chaque lien, en posant

$$L_{\alpha i} = \begin{cases} +1 & \text{si le lien } \alpha \text{ part du sommet } i \\ -1 & \text{si le lien } \alpha \text{ arrive au sommet } i \\ 0 & \text{si le lien } \alpha \text{ n'est pas incident au sommet } i \end{cases}$$

On a alors $(-\Delta) = L^{\mathrm{T}} L$. Appelons L' la matrice déduite de L en supprimant sa première colonne, de telle sorte que

$$M = \det L'^{\mathrm{T}} L' = \sum_{\{\alpha_2 < \cdots < \alpha_v\}} \det L'^{\mathrm{T}}_{\alpha_2 \ldots \alpha_v} L'_{\alpha_2 \ldots \alpha_v}$$

où la sommation porte sur toutes les matrices $L'_{\alpha_2 \ldots \alpha_v}$ d'ordre $(v-1) \times (v-1)$ obtenues en choisissant $v - 1$ lignes de L'. Chaque terme de la somme est de la forme $(\det L'_{\alpha_2 \ldots \alpha_v})^2$, et n'est non nul que si l'application $i \to \alpha_i$ associe à chaque sommet $i = 2, \ldots, v$ un lien incident. Dans ce cas, la matrice $L'_{\alpha_2 \ldots \alpha_v}$ ne diffère d'une matrice de permutation que par le fait que ses éléments sont ± 1 plutôt que $+1$. Il s'ensuit que $(\det L'_{\alpha_2 \ldots \alpha_v})^2$ vaut 1, et que la matrice est en correspondance bi-univoque avec un arbre. On a ainsi prouvé le théorème de Kirchoff. Cette interprétation topologique du laplacien se révèle utile dans les problèmes de percolation et de polymères. Nous en verrons une application au chapitre XI.

1.2 Graphes connexes et cumulants

La propriété fondamentale d'exponentiation se fonde sur les conditions suivantes:

(i) Le graphe vide (sans point, ni ligne) est admissible, et son poids est égal à 1; il a $c = 0$ parties connexes et n'est donc pas connexe ($c \neq 1$).

(ii) Toute juxtaposition d'éléments de graphes admissibles est un graphe admissible.

(iii) Le poids d'un graphe est égal au produit des poids de ses parties connexes.

Sous ces hypothèses, la somme des poids des graphes est égale à l'exponentielle de celle des graphes connexes.

La contrainte d'exclusion est incompatible avec la condition (ii). On vérifiera sans peine que dans ce cas la proposition précédente appliquée telle quelle est inexacte en prenant pour exemple le modèle d'Ising à l'ordre β^4. Nous montrerons dans cette sous-section comment tourner cette difficulté et construire un développement pour l'énergie libre.

La démonstration tient en quelques lignes. Un graphe quelconque sera construit en choisissant indépendamment et successivement ses c parties connexes $\mathcal{G}_1, ...\mathcal{G}_c$ d'après la première condition. L'ordre dans lequel ce choix est fait étant indifférent, chaque graphe est ainsi obtenu exactement $c!$ fois. Utilisant la propriété de factorisation et sommant sur le nombre c de parties connexes

$$\sum_{\mathcal{G}} \omega(\mathcal{G}) = \sum_{c=0}^{\infty} \frac{1}{c!} \sum_{\substack{\mathcal{G}_1,\ldots,\mathcal{G}_c \\ connexes}} \omega(\mathcal{G}_1)\cdots\omega(\mathcal{G}_c) \tag{9}$$

on reconnaît dans le membre de droite de cette relation l'exponentielle annoncée, soit

$$\sum_{\mathcal{G}} \omega(\mathcal{G}) = \exp\left(\sum_{\mathcal{G}\ connexe} \omega(\mathcal{G}) \right) \tag{10}$$

Bien que dans la pratique, il ne soit pas toujours indispensable de se servir de ce résultat, la propriété d'exponentiation est d'une importance capitale : les calculs de quantités extensives, de comportements asymptotiques, de longueurs de corrélation, d'effets de bord reposent sur une propriété d'exponentiation. Nous avons vu que la contrainte d'exclusion, fréquemment rencontrée, l'invalide. Cependant, un simple changement des règles diagrammatiques, connu sous le nom de *méthode des cumulants*, permet de rétablir la propriété.

Supposons donc qu'il existe un autre ensemble de règles n'obéissant pas à la contrainte d'exclusion. Nous en différencierons les graphes en représentant les sommets par des cercles plutôt que des points noirs. Un nouveau graphe représente une partie de la contribution de l'ancien graphe obtenu en fusionnant les sommets portant le même indice. Si l'on veut que le nouveau développement conduise au même résultat, on obtiendra un système de contraintes que l'on peut écrire symboliquement

Singularité de Lee–Yang *123, 127, 129*, 132, 151, 171
Somme de Gauss 194
Somme sur les chemins *9, 26*
Somme sur les surfaces 358
Sous-algèbre de Cartan 202
Spectre hadronique 84
Sugawara 216
Super-champ 264, 297
Super-dérivée schwarzienne 198
Super-renormalisabilité *257*
Supersymétrique 263
Surfaces aléatoires 343
Swendsen 49, 72
Symbole de Riemann–Christoffel 362
Séries θ 192
Séries de couplage fort *32*
Séries de Gauss 146
Table de Kac 130, 143, 172
Temps de thermalisation 53
Tenseur impulsion–énergie 94
Tension de corde *336, 370*
Tension superficielle *83*
Terme de Schwinger 214
Théorie de Kirkwood–Yvon *107*
Théorie de Liouville 376
Théorie perturbative *237*
Théorème d'Elitzur *333*
Théorème de Goldstone *293*, 29, 84
Théorème de Kirchoff 5, 383
Théorème de l'index de Atiyah–Singer 371
Théorème de Mermin–Wagner *140, 192*
Théorème de Nielsen–Ninomiya *380*
Théorème de Noether *94*
Théorème de Peter–Weyl 21
Théorème de von Neumann–Wigner 312
Théorème de Weinberg *268*
Théorème de Wick *23, 55, 92, 96, 238*, 28
Théorème du viriel 245
Tourbillons *194, 197*, 138
Transformation de dualité *177, 201*
Transformation de Jordan–Wigner *61*
Transformation de Legendre *152, 156, 234*, 10
Transformation de Möbius 96
Transformation étoile–triangle *180*
Transformée de Laplace *149*
Transition de Curie *57*
Transition de Kosterlitz–Thouless *192, 197*
Transition déconfinante *344*
Transition de phase du deuxième ordre *68*
Transition rugueuse *89, 202, 370*
Transmutation dimensionnelle 295
Universalité *32*
Variables anticommutantes *47*
Variété triangulée 343
Vecteur de Killing 368, 372
Vecteur de plus haut poids 111
Wegner 260
Weyl 207
Wigner 229, 269
Wilson 49
Wilson *229, 231, 284, 304, 321*, 72
Yang *73*
Yang, Mills *321, 327*
Zamolodchikov 30, 171, 385