Précis de recherche opérationnelle

Méthodes et exercices d'application

Robert Faure
était professeur de la chaire
de recherche opérationnelle au CNAM

Bernard Lemaire
est professeur émérite de la chaire
de recherche opérationnelle au CNAM

Christophe Picouleau
est professeur des universités au CNAM

7e édition

DUNOD

REMERCIEMENTS

Nous remercions toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de cette édition du *Précis de recherche opérationnelle*. En particulier :

Mme Nacera SEGHOUANI-BENNACER Enseignante-chercheuse à Supélec, pour le chapitre portant sur la simulation ;

M. Patrick SIARRY, Professeur à l'Université Paris XII, pour le chapitre traitant des métaheuristiques ;

M Daniel VANDERPOOTEN, Professeur à l'Université Paris-Dauphine pour le chapitre introductif à l'aide multicritère à la décision.

Mme Agnès PLATEAU-ALFANDARI, maître de conférences au CNAM, pour ses remarques pertinentes.

Illustration de couverture ©Kentoh-Fotolia.com

ISBN 978-2-10-070612-9

Table des Matières

AVANT-PROPOS

Le « Précis de recherche opérationnelle » a été publié pour la première fois en 1968, puis a fait l'objet de cinq autres éditions, puis d'une sixième édition en 2009 refondue et complétée. En voici une 7^{e} édition révisée.

Cet ouvrage se distingue principalement par son caractère pédagogique très marqué, par son souci de replacer l'exposé des principales méthodes de la recherche opérationnelle dans un contexte appliqué. Il a connu, depuis sa première version, une très large diffusion qui en a fait un vecteur privilégié d'initiation et de formation à la recherche opérationnelle pour des générations d'étudiants, d'ingénieurs, de cadres. Aussi nous a-t-il semblé important de l'actualiser pour lui permettre de continuer d'assurer cette mission.

Ce livre peut être abordé par un large public : il privilégie un langage d'explication naturelle, en évitant, sous prétexte de rigueur académique, un exposé par trop abstrait s'appuyant sur un formalisme mathématique ou un jargon qui ne le rendrait que beaucoup plus difficilement accessible.

Il comporte plusieurs niveaux de lecture, les paragraphes les plus « pointus » ayant été placés en fin de chapitre. Ainsi convient-il tout à fait à une découverte de la R.O., comme on la pratique en deuxième ou troisième année de l'enseignement supérieur. Il est accessible à des lecteurs dont la formation de base est variée, pas nécessairement spécialisés en mathématiques et/ou en informatique.

Certes la diffusion, désormais large, de logiciels intégrant les méthodes ici décrites, facilite et accélère l'application de la R.O. par l'ingénieur dans l'entreprise, mais encore faut-il pour mieux les utiliser connaître les méthodes qui les sous-tendent : nous exposons ici les principales. Il convient aussi d'apprendre à formuler, modéliser les problèmes concrets que peut rencontrer l'ingénieur.

Le souci des auteurs, pour la présente édition, a été de moderniser et de compléter le contenu de ce manuel, tout en conservant le caractère pédagogique. Depuis les premières éditions, l'algorithmique a connu et continue de connaître de nombreux progrès. Ainsi dans le domaine de la complexité des algorithmes et des problèmes (qu'ils soient polynomiaux ou bien « NP-complets »), avec l'approximabilité des problèmes difficiles, avec la démonstration du caractère polynomial de la programmation linéaire (même si les algorithmes polynomiaux de résolution des programmes linéaires, les « méthodes intérieures », sortent du cadre de cet ouvrage) ; les avancées dans les structures de données et les algorithmes de « parcours des graphes » ont permis de construire des algorithmes de faible complexité résolvant des problèmes classiques tant de théorie des graphes non valués (connexité, forte connexité, etc.) que d'optimisation dans les graphes valués. Dans le domaine stochastique (aléatoire), on a assisté notamment au développement de la sûreté de fonctionnement des systèmes et de l'évaluation de leurs performances.

Nous avons eu le souci de présenter des méthodes spécifiques qui sont éprouvées, opérationnelles. En fin d'ouvrage le lecteur trouvera trois chapitres traitant de méthodes générales de résolution de problèmes : d'une part un chapitre sur les techniques de simulation, d'autre part un chapitre sur les méta-heuristiques (recuit simulé, tabou, algorithmes génétiques, colonies de fourmis, etc.) qui permettent à l'ingénieur d'obtenir rapidement une première solution (généralement sous-optimale) au problème de R.O. qu'il doit traiter (souvent en un temps bien limité !), enfin un chapitre consacré à l'aide à la prise de décision face à plusieurs critères (analyse multicritère).

Nous nous sommes gardés du souci d'exhaustivité qui aurait conduit à un ouvrage pléthorique, pour nous limiter aux bases de la discipline et à ses problèmes centraux. Aussi des domaines, tels que : les SIAD (systèmes interactifs d'aide à la décision), les réseaux de Petri, les bases de la programmation non linéaire, la programmation convexe, les méthodes polyédrales, ne sont pas abordés ici ; toutefois leurs prérequis y sont développés. Dans le domaine des graphes nous ne traitons pas directement certains problèmes avancés (emplois du temps, tournées de véhicules, affectations de ressources et de fréquences en télécommunications, etc.), même si les modèles et algorithmes présentés ici peuvent contribuer à leur résolution.

Nous serons tout à fait satisfaits si ce livre est jugé, par ses lecteurs, comme approprié à son but, qui est de transmettre des connaissances et de fournir une ouverture d'esprit sur la modélisation et l'optimisation appliquées. Nous espérons aussi qu'il les incitera à un approfondissement !

Pr B. LEMAIRE
bernard.lemaire@cnam.fr

Pr C. PICOULEAU
christophe.picouleau@cnam.fr

Introduction à la recherche opérationnelle

À première vue, la recherche opérationnelle est un ensemble de techniques récentes, datant tout au plus de la Seconde Guerre mondiale. Et, en fait, c'est bien à son application aux *opérations* militaires qu'elle doit son nom.

En réalité, elle est bien plus ancienne, car, dès le XVII^e^ siècle, Blaise Pascal et Pierre de Fermat, inventeurs de la notion *d'espérance mathématique* (1654), cherchaient, suivis de peu par Jacques Bernoulli puis Waldegrave, à résoudre des problèmes de *décision dans l'incertain.* Avant la fin de l'ancien régime, Gaspard Monge s'était proposé et avait résolu analytiquement un problème économique de nature *combinatoire* : celui des déblais et remblais (1776). Sous la monarchie de Juillet, Augustin Cournot s'était attaqué à la théorie *mathématique des richesses* (1838), devenant ainsi le précurseur de l'économétrie. Au début du XX^e^ siècle, Emile Borel introduisait la *théorie mathématique des jeux,* sous sa forme moderne, à l'Académie des Sciences (1921-1925), tandis qu'Erlang fondait celle des *files d'attente,* qu'il utilisait à la conception des réseaux téléphoniques (1917). Enfin, à la veille de la guerre 1939-1945, Leonid Kantorovitch concevait et appliquait la *programmation linéaire* à la planification, peu après que Dénes König eut systématisé les *graphes* (1936).

On peut donc dire que, lorsque le physicien anglais Patrick Blackett fut, en 1940, appelé à diriger la première équipe de chercheurs opérationnels, d'illustres devanciers l'avaient précédé. Cependant, Blackett eut l'immense mérite de trouver, notamment, l'organisation lui permettant de traiter rapidement et avec succès les difficiles questions telles que l'implantation optimale des radars de surveillance des côtes britanniques ou encore de la protection des convois de navires marchands reliant la Grande Bretagne et les États-Unis, qui devaient jouer un rôle déterminant dans la *bataille d'Angleterre.* L'efficacité de son entreprise était due aux trois faits suivants : l'équipe qu'il avait rassemblée était très *hétérogène* (autrement dit elle rassemblait des compétences variées, complémentaires ; ainsi, les points de vue qu'elle exprimait étaient plus pertinents) ; aucune *information* (même secrète) ne fut jugée trop noble pour échapper à sa compétence : les *données,* nécessaires à ses études, étaient complètes et fiables ; enfin il réservait la *décision* à l'état-major (il n'y eut pas de substitution de pouvoir : son équipe ne s'est pas arrogé le pouvoir de décision. L'amirauté britannique restait libre d'adopter les conclusions des travaux de Blackett et de son équipe, ou bien de les rejeter). Ces règles s'appliquent encore aujourd'hui, et font partie de la déontologie de la recherche opérationnelle d'entreprise.

Dès la fin des hostilités, furent tentés de nombreux essais d'application à l'économie industrielle des méthodes jusqu'alors éprouvées seulement par les états-majors alliés. Depuis les années cinquante, nombre de publications scientifiques et techniques témoignent de leur réussite et de leurs heureux développements.

C'est pourquoi l'on peut légitimement se demander pourquoi l'apparition de la recherche opérationnelle d'entreprise a été si tardive. Il est bon de citer ici quelques-unes des principales raisons de cette naissance laborieuse :

a) les modèles mathématiques qui ont, de longue date, conquis la physique et, peu à peu, bien d'autres sciences expérimentales, n'ont pas été acceptés d'emblée par les spécialistes des sciences économiques, particulièrement de la micro-économie et surtout de l'économie d'entreprise. Il ne faut pas méconnaître que les économistes avaient quelques raisons de suspecter des modèles inertes, simplistes, rigides et abstraits, d'être peu propres à représenter le milieu vivant, complexe, flexible et terriblement concret de l'économie. Toutefois, dès que la connaissance économique fut suffisamment avancée et consentit à se parer du nom de science, il fallut bien se rendre à l'évidence : comme dans toutes les autres sciences expérimentales, parvenues à une certaine maturité, le recours à la mathématique était incontournable ;

b) c'est seulement à partir des années cinquante que les problèmes économiques sont devenus irrémédiablement complexes, en raison de la taille croissante des firmes et de l'intrication extraordinaire des liens qui les unissent entre elles ;

c) enfin, les acquis théoriques de la recherche opérationnelle ne seraient rien sans la puissance de calcul : les ordinateurs sont indispensables pour résoudre les problèmes dans la pratique. Or, les premiers ordinateurs n'ont été commercialisés qu'en 1955-1956.

À ce propos, il peut être utile de remarquer qu'il en va de la recherche opérationnelle comme des ordinateurs. Ces derniers ont suscité des espoirs démesurés ou des craintes infondées. Il faut répéter que la machine doit être considérée comme un instrument, un outil au service de son créateur : *l'homme.* Il faut se persuader que lorsque l'on confie à une machine l'exécution d'opérations qui, naguère encore étaient l'apanage de l'esprit humain, le caractère de cette besogne se transforme, du même coup, radicalement : le *travail intellectuel devient un simple travail d'exécution.* Il n'y a donc aucune chance qu'une machine *dépasse* un jour son auteur, bien qu'il n'y ait pas d'impossibilité à ce qu'elle *démontre* une conjecture, voire découvre un théorème inconnu (par une combinaison logique inattendue...). De la même manière, la recherche opérationnelle est *l'auxiliaire de la décision humaine* : elle lui est, par essence, *subordonnée* et il n'existe pas plus de chance qu'elle la supplante un jour. C'est pourquoi on considère souvent que la recherche opérationnelle est une composante majeure de *l'aide à la décision.*

UNE DÉFINITION DE LA R.O.

Plutôt qu'un simple arsenal de méthodes mathématico-informatiques destiné à l'optimisation des processus de production et de diffusion des produits ou à celle d'organisations dans le secteur tertiaire, la recherche opérationnelle peut se définir comme *l'ensemble des méthodes et techniques rationnelles d'analyse et de synthèse des phénomènes d'organisation utilisables pour élaborer de meilleures décisions.* Chaque fois que des hommes, des machines, des produits se trouvent en relations actives, on dira que l'on a affaire à un *phénomène d'organisation.* Les problèmes relatifs à ces phénomènes d'organisation se signalent tout d'abord, généralement, par leur caractère hautement combinatoire. Pour peu que le hasard y soit mêlé et que la concurrence s'y manifeste, les situations deviennent encore plus compliquées.

Il a été longtemps de mode de penser que les décisions, à propos des phénomènes d'organisation qui existent dans l'entreprise, la région, voire la nation, étaient du ressort du seul bon sens. C'est particulièrement vrai en France, où la formation des dirigeants et des entrepreneurs est fortement teintée de cartésianisme et où l'on confond volontiers la puissance de l'esprit humain avec les ressources du *sens commun.*

Aussi, la recherche opérationnelle n'est pas le moyen d'échapper aux jugements de bon sens. Bien au contraire, elle constitue la méthode adéquate pour ramener l'attention de l'homme aux domaines où sa raison individuelle peut s'exercer efficacement, c'est-à-dire au niveau des choix – une fois résolus et explorés, par des techniques adéquates, les problèmes combinatoires, aléatoires ou concurrentiels qui dépassent l'esprit humain même le mieux constitué.

LES DOMAINES D'APPLICATION

L'idée à retenir est que la R.O. ne s'occupe pas des problèmes dans lesquels une solution de bon sens intervient tout naturellement. Son domaine réservé est celui des situations dans lesquelles, pour une raison quelconque, le sens commun se révèle faible ou impuissant.

Tels sont :

1) Les problèmes combinatoires ;
2) Les domaines de l'aléatoire ;
3) Les situations de concurrence.

1) Il est bien connu que l'homme envisage difficilement la multiplicité des combinaisons qui se présentent, dans les moindres faits de la vie, lorsque plusieurs variables peuvent prendre, chacune, des états différents.

Ainsi, si l'on pose à l'homme de la rue cette question : combien faut-il de temps à une famille de huit personnes, prenant en commun deux repas journaliers, pour épuiser les diverses possibilités de se grouper autour de la table familiale ?, on recevra des réponses variées, dont les moins optimistes fixeront un délai de quelques mois pour la réalisation de ce modeste objectif. On sait qu'en réalité, à raison de deux repas par jour (2), douze mois par an (3×4), trente jours par mois (5×6), il faudra cinquante-six ans (7×8) pour en venir à bout, car :

$$8\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8,$$

le nombre des dispositions différentes, est déjà un nombre très grand. Soit :

$$8\,! = 40\,320$$

Dans tous les problèmes fortement combinatoires (le précédent étant encore de taille modeste), l'esprit humain ne peut envisager le nombre astronomique des arrangements, permutations, combinaisons. Il lui faut un *fil d'Ariane* s'il veut choisir, entre telle ou telle de ces dispositions, relativement à un critère quelconque, car, même avec une puissante machine, le principe fondamental en matière combinatoire demeure de proscrire *toute énumération.* Pour s'en convaincre, il suffit de constater que l'énumération de 20! solutions (nombre des affectations de vingt personnes à vingt postes), à raison d'un million d'affectations par seconde, prendrait 77 096 ans ; le lecteur notera que même avec un ordinateur mille fois plus rapide, qui pourrait donc énumérer un milliard d'affectation par seconde, il faudrait encore 77 ans ! Or les compagnies aériennes sont confrontées à de tels problèmes, mais à la dimension 100 ou davantage... Ou bien d'imaginer un instant qu'il est possible d'énumérer les fonctions différentes de 9 variables booléennes seulement ; or celles-ci sont au nombre de :

$$2^{2^9} = 2^{512} \cdot 1{,}134076087.10^{155},$$

qui dépasse le nombre estimé des électrons et des protons dans l'Univers !

2) Devant les problèmes de l'aléatoire, la situation du décideur n'est guère meilleure.

Considérons l'exemple (d'école) qui suit : dans une grande entreprise, la moyenne des entrées des personnels au bureau du correspondant de la sécurité sociale, est d'une personne par 4 minutes ; l'employé de ce bureau peut servir, en moyenne, une personne toutes les 3 minutes 18 secondes. On peut en conclure[1] que l'employé de bureau, recevant $\dfrac{8 \times 60}{4} = 120$ clients par jour et leur consacrant 3mn $18 \times 120 = 6$ h 36 mn, sur sa journée de 8 heures, peut largement suffire à ce service.

Mais cette solution par les moyennes est mauvaise, comme on le verra plus loin, car le temps perdu par les personnels, en attente d'être servis, peut atteindre de nombreuses heures qui, étant donnée la perte à la production correspondante, reviennent incroyablement plus cher que l'embauche d'un second employé, pourtant destiné seulement à *absorber les pointes de trafic.*

Pour que cette véritable solution puisse apparaître, il est nécessaire de considérer le phénomène aléatoire dans toute son ampleur ; il faut tenir compte de toutes les incidences du hasard et minimiser l'espérance mathématique du coût global des opérations.

1. Tant il est vrai que la croyance à la *compensation* est ancrée dans la conscience de l'homme social, alors que les conditions ne sont évidemment pas réunies pour qu'elle puisse jouer au niveau de l'entreprise.

3) Enfin, les situations de « duel » (sinon de concurrence multiple, cas encore plus difficiles) demandent à être étudiées avec le plus grand soin. Il est bien clair, en effet, que le choix d’une *stratégie,* dans une situation donnée, dépend des décisions des concurrents. Et, comme celles-ci sont éventuelles, il s’agit, à la fois, d’un problème *combinatoire* et d’une *situation de hasard.*

Imaginons, par exemple, qu’un fabricant A hésite, à chaque campagne de vente, entre la hausse, le maintien et la diminution de ses prix de vente, sachant parfaitement que la concurrence peut lui opposer les mêmes *stratégies.* Supposons, en outre, qu’il ait été en mesure de déterminer les gains (les gains étant négatifs sont des pertes) qu’il réaliserait pour chaque paire de choix (son propre choix et celui du concurrent) par rapport au chiffre normal. Ces situations sont résumées par le tableau ci-dessous :

		Stratégies de la concurrence		
		+	=	−
Stratégies	+	10	−1	−4
de	=	6	0	−2
A	−	10	−1	2

On verra, dans le chapitre 9 portant sur la théorie des jeux, que la solution (nullement immédiate) de ce problème est la suivante : le fabricant doit, au hasard, mais trois fois sur cinq, maintenir ses prix et, deux fois sur cinq, les abaisser, pendant que son concurrent, s’il est habile (ce qui est évidemment postulé) doit, quatre fois sur cinq, les maintenir et, une fois sur cinq, les diminuer, moyennant quoi A ne perdra, en moyenne, que 0,4 à chaque « coup ».

Les domaines d’application de la recherche opérationnelle peuvent donc se classer en :

– *problèmes combinatoires* ; exemples : définition des investissements les plus rentables ; optimisation des programmes de production, des niveaux d’activité, des affectations, des transports et de la logistique ; ordonnancements, etc. ;
– *problèmes stochastiques* (c’est-à-dire où intervient le hasard) ; exemples : files d’attente, fiabilité des équipements et sûreté de fonctionnement des systèmes, gestion de la production, etc. ;
– *problèmes concurrentiels* ; exemples : définition de politiques d’approvisionnement, de vente, etc.

Difficultés et dangers de l’optimisation

a) Un entrepreneur pourrait avoir le sentiment qu’en minimisant ses investissements, optimisant ses fabrications (productivité maximale, coût minimal), déterminant le prix de vente le plus convenable, etc., il fera le profit maximal.

Mais le mathématicien est souvent désemparé face à un problème dans lequel existent simultanément plusieurs fonctions à optimiser. *L’aide multicritère à la* *décision* vise à traiter de tels problèmes (à laquelle est consacré un chapitre en fin de cet ouvrage).

C'est pourquoi, dans la majorité des cas, l'entrepreneur doit se borner à indiquer les limites de ses investissements, des dépenses en études et recherches, en service commercial, les capacités de fabrication et de stockage, etc., pour permettre au chercheur opérationnel d'optimiser une seule et unique fonction, par exemple maximiser une fonction de revenu.

Les limites indiquées fournissent les *contraintes* du problème. Par exemple, si des produits P_1, P_2 et P_3, fabriqués en quantités respectives x_1, x_2 et x_3, occupent respectivement un volume de 1, 2, et 2 m^3 par unité fabriquée, et si l'on dispose d'une capacité totale de stockage de 4 000 m^3, on écrira :

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leqslant 4\,000\,;$$

c'est la contrainte de capacité de stockage.

Si ces produits laissent des profits nets respectifs de 4, 12 et 3 unités monétaires et si l'on désire maximiser le revenu, on posera :

$$[\max]\ z = 4x_1 + 12x_2 + 3x_3\,;$$

C'est la *fonction économique* ou *critère d'optimisation* du problème.

Les différentes contraintes limitent, dans un espace à n dimensions (s'il y a n variables), un volume à l'intérieur ou à la périphérie duquel se trouvent les points dont les coordonnées constituent une solution possible du problème. Il reste alors à trouver et à utiliser des techniques permettant de choisir, parmi cette infinité de points, celui (ou ceux) qui donne(nt) à la fonction économique sa valeur optimale.

Fréquemment il y aura *unicité* de la fonction (ou critère) à optimiser. Remarquons que cette idée n'est pas en opposition avec la démarche de *l'analyse multicritère* introduite en fin de cet ouvrage.

b) On se rend compte qu'il est bien difficile d'imaginer – et, a fortiori, en général impossible de bâtir – un modèle *complet* du fonctionnement d'une entreprise.

En conséquence, l'entrepreneur propose, souvent, au chercheur opérationnel, de se borner à un aspect de ses préoccupations (fixation des niveaux d'activité, optimisation de la gestion des stocks, par exemple). Dans ces conditions, il ne s'agit que d'une *sous-optimisation,* qui risque de provoquer des perturbations sérieuses dans des domaines connexes de l'entreprise (ou de son environnement).

Une sous-optimisation comporte donc des dangers ; avant de l'appliquer, il faut prendre garde à ses conséquences sur les éléments qui ne figurent pas dans le modèle. Ainsi une optimisation des stocks chez *B,* qui a comme fournisseur *A,* et *C* comme client, peut entraîner des difficultés inattendues chez ce fournisseur et ce client !

c) Un critère d'optimisation peut se dégrader, voire même être périmé lorsque un certain temps a passé. Cela est dû, avant tout, à la grande variabilité du monde économique, aux progrès de la technique, à l'obsolescence des produits, aux fluctuations des réglementations, aux renversements de la mode, etc. et parfois, tout simplement, à la succession des saisons.

Ce qui est bon pour l'année n peut devenir mauvais pour l'année $n + 1$; ce qui est à conseiller en été peut être à rejeter en hiver...

Bref, en recherche opérationnelle, l'évolution est de règle, même pour le critère de choix.

Objectifs et critères

La définition des objectifs et la détermination du critère d'optimisation sont du ressort de l'entrepreneur.

Ce serait avoir une vue technocratique de la recherche opérationnelle que d'imaginer que c'est à l'analyste de fixer les valeurs limites définissant les contraintes et de fixer le(s) critère(s) de choix.

Au contraire, ce sont là des domaines qui appartiennent en propre à l'entrepreneur. Si, par exemple, l'analyste se voit confier l'étude des politiques d'exploitation d'une société concessionnaire de services, il ne peut décider, de lui-même, d'optimiser la rémunération du capital, en limitant le service aux exigences du cahier des charges, ou, au contraire, d'optimiser le service au meilleur profit des usagers, en assignant au capital tel ou tel rendement qui lui plaît. C'est aux dirigeants de la société, ou, dans certains cas, aux autorités de tutelle, de choisir entre ces deux situations opposées. Le mieux étant sans doute, dans le cas présent comme dans beaucoup d'autres, d'obtenir un éventail de solutions favorisant ainsi un choix éclairé.

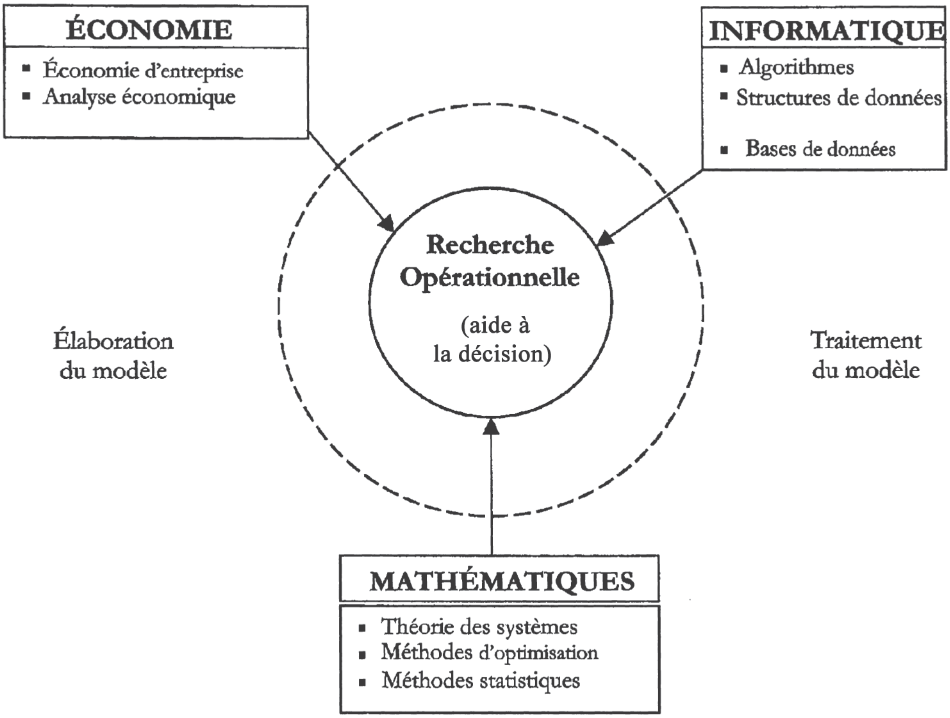
Car le chercheur opérationnel ne saurait non plus se substituer à l'entrepreneur, dont c'est la fonction de décider quelle solution lui paraît la plus convenable ou la plus praticable.

Il faut affirmer bien haut que la R.O., loin d'entraver l'exercice des prérogatives de l'entrepreneur, autorise ce dernier à décider en meilleure connaissance de cause, donc élève finalement le niveau où se manifeste la liberté du choix.

La R.O. : une pratique à caractère scientifique

Les méthodes et le but de la recherche opérationnelle en font bien plus une pratique à caractère scientifique qu'une science. En effet, elle ne cherche pas tant à *expliquer* les phénomènes qu'elle prendrait en compte en découvrant des lois, qu'à permettre d'agir sur l'évolution de ces phénomènes.

Un *modèle* (ou, plus modestement, un *schéma d'intervention*) est utile voire indispensable à un agent économique déterminé pour obtenir – de son point de vue – les meilleurs résultats possibles dans des circonstances déterminées.



En tout cas, la recherche opérationnelle apparaît comme une discipline-carrefour, associant étroitement les méthodes et les résultas de l'économie d'entreprise, la mathématique et l'informatique. L'élaboration du schéma d'intervention (ou modèle) utilise les ressources conjuguées de l'analyse économique et de la théorie des systèmes ; elle a besoin aussi de données à collecter puis à saisir, justiciables de méthodes statistiques. Le traitement algorithmique du modèle, après que la mathématique ait permis de choisir une voie (le plus souvent un algorithme) pour atteindre une bonne solution (voire l'optimum, s'il est bien défini et accessible), entraîne un recours à l'informatique. Enfin la critique des résultats exige, une fois de plus, la réunion des différents acteurs.

Rentabilité de la R.O.

On se doute bien que la R.O. n'est pas gratuite. Le plus fréquemment, elle est mise en œuvre par des consultants n'appartenant pas à l'entreprise ; il s'agit donc de savoir si, au plan financier, l'application des résultats de leurs études procure ou non un bénéfice, compte tenu des charges entraînées par l'étude elle-même et quelle est la durée du « retour sur investissement ».

Même dans la société la mieux administrée, un certain nombre de problèmes combinatoires peuvent être mal résolus.

Nous nous permettrons de citer, à ce sujet, deux exemples empruntés à A. Kaufmann :

1) une société de transports aériens, ayant 400 vols et 600 liaisons à effectuer entre 13 villes souhaitait améliorer le plan de ses vols, conçu jusqu'alors par un bureau d'études travaillant selon une méthode « habituelle ». À première vue d'ailleurs, le programme des vols établi par cette méthode semblait donner satisfaction, mais la direction désirait en obtenir confirmation. À cause de nombreuses contraintes de caractère économique ou social (temps maximal de pilotage, temps supplémentaire passé au sol, repos obligatoire, retour périodique des équipages et des appareils au port d'attache, entretien préventif, indemnités de déplacement, etc), le calcul apparaissait comme compliqué. Néanmoins, l'ordinateur, après implémentation d'un programme d'affectation approprié, fournit, en un temps minime, un solution qui procurait un gain de 18 % par rapport au plan obtenu manuellement...

2) Une usine sidérurgique possédait trois chaînes de laminoirs, dont la première était très moderne et la dernière très vétuste. Chaque mois, un bureau de planification répartissait entre les trois chaînes les productions à réaliser, selon le carnet de commandes et les prévisions du service commercial. Un simple programme linéaire, dont la solution sur ordinateur peut être obtenue en bien moins d'une seconde, établit une répartition qui faisait gagner 6 % du coût total de fabrication, par rapport au plan, particulièrement soigné, calculé par le bureau compétent. Et, bien entendu, tout plan et toute modification pouvaient être désormais obtenus dans les minutes qui suivaient, quasiment en temps réel...

Cependant, il est bien clair, néanmoins, qu'on ne doit pas toujours s'attendre à des gains de cet ordre, à chaque intervention. Néanmoins le « retour sur investissements » se chiffre en mois bien plus souvent qu'en années. Et plusieurs sous-optimisations non contradictoires peuvent conduire à des bénéfices cumulés dignes d'être pris en considération.

D'autre part, la recherche opérationnelle apparaît, de jour en jour davantage, dans un rôle moins ponctuel *d'aide à la décision,* qui lui convient bien mieux. Pour le jouer convenablement, il lui faut revenir à une composition plus hétérogène des équipes d'analystes (qui ne sauraient notamment se passer ni des compétences *d'économistes,* ni *d'organisateurs* – au sens de spécialistes de la vie des entreprises –) et à une prolongation des interventions au-delà de la remise du rapport d'étude (maintenance, cycle de vie).

En effet, le temps est révolu du rapport alambiqué, hérissé de formules et de jargon, dont les conclusions ne seront jamais mises en application. Les analystes, après le dépôt de leur rapport, qui sera rédigé le plus simplement possible dans le langage le plus courant, devront encore convaincre les responsables de la possibilité d'agir en tenant compte de leurs recommandations et les aider à les mettre en œuvre.

Le conseiller en recherche opérationnelle apporte un œil neuf et des méthodes raffinées d'analyse et de synthèse. Sa fonction n'est pas d'émettre des oracles, mais d'aider ceux qui le consultent à comprendre les implications des différentes décisions qu'ils pourraient prendre, de les aider à choisir, puis finalement de les assister dans la mise en pratique de la décision retenue. Sans cette volonté *d'accompagner l'action,* il risquerait, le plus souvent, d'abandonner le *décideur* à ses préjugés ou ses impulsions irrationnelles ou – pire – de se substituer au décideur.

R.O. ET GESTION

Naguère encore, le souci d'une bonne gestion se traduisait par un soin spécial apporté à la comptabilité. Initialement, la comptabilité est *l'histoire du passé* de l'activité et elle comporte plusieurs buts, dont l'un est de permettre de connaître la situation financière de l'entreprise (les éléments passifs et actifs) et l'autre de fournir au fisc les bases d'imposition.

Puis la comptabilité est aussi devenue un instrument de *prévision.* L'étude des ratios permet de surveiller le développement de l'entreprise et facilite l'élaboration de certaines décisions : le contrôle budgétaire autorise une certaine planification interne et un contrôle permanent de l'utilisation et de la croissance des ressources.

La comptabilité doit concourir à une gestion de plus en plus *scientifique.* Une des conditions de ce développement est *l'intégration* des données, qui vise à saisir le fait élémentaire, une fois pour toutes, dans sa « pureté », c'est-à-dire au plus près de sa source. Il faut remarquer que cette exigence ne contrarie en rien la réalisation d'un système *d'information* adapté à une structure plus ou moins décentralisée de l'entreprise et s'accommode, sans difficulté, de tout système informatique correspondant au type d'organisation retenu.

Par exemple, l'étude de la distribution statistique des ventes nécessitait hier une ventilation particulière des commandes des clients ; aujourd'hui, les codes-barre à une ou deux dimensions (QR-codes) ou les puces électroniques, sur lesquels ont été enregistrées les données, en vue d'établir les bons de livraison, bordereaux, factures, etc., peuvent servir, sans autre apprêt, à un rapide dépouillement.

BUT ET PLAN DE L'OUVRAGE

Le présent ouvrage reproduit en grande partie des conférences, puis des cours, professés depuis plus de cinquante ans, principalement au CNAM, où ils ont bénéficié du meilleur accueil. Sans doute faut-il rechercher la raison de ce bon accueil dans le fait que les élèves du Conservatoire National des Arts et Métiers étant déjà pour la plupart des praticiens, ont, plus que d'autres élèves-ingénieurs souvent plus jeunes, le sens des réalités économiques, la connaissance de l'entreprise, et la notion des difficultés à vaincre dans ces domaines.

Dans l'entreprise ou l'administration classiques, dans les groupements économiques horizontaux ou verticaux, privés ou publics, les méthodes de gestion scientifique et, en particulier, la recherche opérationnelle ont gagné bien du terrain. Et encore davantage en période de crise...

Ces méthodes sont désormais indispensables : la société tout entière étant confrontée à *l'automatisation* et à *l'informatisation.* Car ces mots, dans le domaine industriel, n'évoquent plus seulement la création, pour les productions de masse, de chaînes où les manipulations des éléments en cours de fabrication sont effectuées mécaniquement. Il s'agit, bien davantage, de l'association des ordinateurs à la production et au contrôle :

a) *commande et contrôle numérique* des machines-outils ou des robots en vue de l'usinage des pièces complexes, de grandes dimensions, à tolérances serrées ;

b) *conduite et régulation des processus* dans les industries de transformation physique, chimique ou physico-chimique ;

c) commande et contrôle en *temps réel* d'un ensemble de processus industriels et administratifs.

Il en va de même dans le secteur tertiaire (notamment en transport et logistique).

Les solutions implémentées informatiquement doivent être capables à tout moment :

1) d'élaborer des instructions ayant pour but de corriger une action en cours ou de la modifier;

2) de rendre compte sur-le-champ de leur activité aux intéressés immédiats ;

3) d'informer succinctement, au fur et à mesure, les dirigeants.

Il est donc naturel que les ingénieurs des diverses spécialités, au CNAM comme ailleurs, et au premier rang, ceux qui s'occuperont justement du traitement des données et de l'optimisation, soient intéressés par les méthodes et les techniques de la recherche opérationnelle.

Cet ouvrage didactique, pédagogique est destiné à leur venir en aide.

L'exposé a été divisé en quatre grandes parties.

- *La R.O., fil d'Ariane dans les problèmes combinatoires discrets*

Après avoir donné quelques éléments *d'algèbre de Boole* binaire, de *théorie des graphes, des parcours des graphes* et *programmation dynamique* en univers certain, on examine leurs principales applications en recherche opérationnelle.

Pour l'algèbre de Boole : *codage et énumération implicite. Recherches arborescentes.*

Pour les graphes :

– problèmes de *chemins de valeur optimale* ;
– problèmes *d'ordonnancement* ;
– problèmes de *flot maximal* ;
– problèmes d'*affectation* ;
– problèmes de *transport* ;
– problème du *voyageur de commerce.*

La théorie des graphes constitue d'ailleurs le lien implicite entre les deux premières parties du livre.

- *La R.O. contre le hasard (stochastique)*

Dans cette partie, on étudie tout d'abord, notamment au moyen des graphes, les bases de la théorie des processus stochastiques (essentiellement les *chaînes et les processus de Markov*) et l'on donne un aperçu de la *programmation dynamique* en univers aléatoire.

Puis on en envisage les importantes applications :
- *fiabilité des équipements et sûreté de fonctionnement des systèmes* ;
- *phénomènes d'attente.*

Enfin, un chapitre particulier, en fin d'ouvrage, est consacré aux *méthodes de simulation.*

• *La R.O. dans les problèmes combinatoires continus*

Cette partie est entièrement dévolue à la programmation mathématique. En fait, vu le niveau auquel on se place ici, on se bornera à la programmation linéaire, selon le plan suivant :
- *présentation des programmes linéaires* ; leur aspect géométrique ;
- *algorithme du simplexe* ;
- *notion de dualité* ;
- *paramétrisation* : paramétrages de la fonction économique et du second membre.

En dépit du titre de cette troisième partie, on apportera quelques indications sur les troncatures réalisables *en programmation* « *discrète* », avec les programmes linéaires en nombres entiers.

• *La R.O. et les situations concurrentielles*

On se borne, dans cette partie, à présenter la *théorie des jeux* et ses liens avec la programmation linéaire (*dualité*).

La R.O. dans sa pratique

Ce précis n'est qu'un ouvrage didactique, aussi n'abordons-nous que brièvement les conditions dans lesquelles la R.O. intervient dans la pratique.

Hâtons-nous de préciser d'abord, que, dans la vie, on ne rencontre que rarement des situations assez simples pour être justiciables directement d'un des algorithmes élémentaires. Bien souvent, un problème concret nécessite la mise en œuvre d'un ensemble de méthodes, les unes s'inspirant des procédés classiques, les autres résultant de recherches originales. Parfois, pris par le temps, l'analyste se contente d'adapter une méta-heuristique (auxquelles nous avons réservé un chapitre en fin d'ouvrage) à son problème et n'obtient qu'une solution approchée. Pour certaines « heuristiques » (algorithmes approchés), il existe des « garanties de performance ».

Répétons aussi que l'on peut avoir avantage, dans la pratique, à substituer à la notion d'optimum (mathématique), utilisée dans les schémas les plus simples, le concept de solution « très satisfaisante », ou même seulement « bonne ». C'est notamment le cas lorsqu'un critère unique et précis n'a pu être défini.

Insistons enfin sur les relations entre chercheurs opérationnels et « utilisateurs ». Toute équipe de R.O. doit, sous peine d'échec, travailler en parfait accord avec les utilisateurs, et préparer, en collaboration avec eux et leur organisateur, les améliorations et changements qu'elle préconise et dont il lui faut établir clairement l'efficacité. Tout ceci est valable, qu'il s'agisse d'une décision exceptionnelle prise au niveau le plus élevé, ou qu'il soit tout simplement question d'améliorer des procédures décisionnelles répétitives. Dans ce dernier cas, il y a intérêt à instituer une collaboration, généralement acceptée, entre l'homme et la machine.

1 STRUCTURES ORDONNÉES APPLICATIONS DES TREILLIS ET DE L'ALGÈBRE DE BOOLE EN RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

1.1 NOTIONS SUR LES STRUCTURES ORDONNÉES[1]

1.1.1 Relations. Relations binaires. Propriétés

On nomme *relation* tout sous-ensemble du « produit cartésien » de deux ou plusieurs ensembles.

Ainsi, $R = \{(a,\beta);\ (c,\alpha);\ (c,\delta)\}$ est par définition un sous-ensemble de :
$\{(a,\alpha);(a,\beta);(a,\gamma);(a,\delta);(b,\alpha);(b,\beta);(b,\gamma);(b,\delta);(c,\alpha);(c,\beta);(c,\gamma);(c,\delta)\}$,
qui n'est autre que le produit cartésien, noté $A \times B$ de $A = \{a,b,c\}$
par $B = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$.

En particulier, une *relation binaire* sur un ensemble de E (ainsi que l'on dit par abus de langage) est un sous-ensemble du produit $E \times E$. Prenons par exemple $E = \{x,y,z\}$. Nous représentons le produit cartésien sous forme d'un tableau :

1. Ce sous chapitre ne constitue qu'un rapide rappel. Au cas où le lecteur voudrait approfondir les questions concernant les relations et les structures ordonnées, il pourra se reporter à des livres spécialisés.

	x	y	z
x	(x, x)	(x, y)	(x, z)
y	(y, x)	(y, y)	(y, z)
z	(z, x)	(z, y)	(z, z)

Produit cartésien ExE

	x	y	z
x	(x, x)		(x, z)
y		(y, y)	
z	(z, x)		

Relation R_1

	x	y	z
x	(x, x)	(x, y)	
y			(y, z)
z	(z, x)		(z, z)

Relation R_2

On nomme tout naturellement relation *diagonale* : $\Delta = \{(x, x); (y, y); (z, z)\}$.

Une relation est, par définition, *réflexive* si elle contient la diagonale. La relation R_1, est symétrique, mais elle n'est pas réflexive. Pour qu'une relation soit *symétrique*, il faut, quels que soient α et β, qu'elle contienne le couple (β, α) si le couple (α, β) lui appartient. La relation R_2 est *antisymétrique*, mais elle n'est pas réflexive. Pour qu'une relation soit antisymétrique, il faut, quels que soient α et β, qu'elle ne contienne pas le couple (β, α) si le couple (α, β) lui appartient, sauf si α = β, c'est-à-dire s'il s'agit d'un élément de la diagonale.

	x	y	z
x	(x, x)	(x, y)	(x, z)
y			
z			(y, z)
			(z, z)

Relation R_3

	x	y	z	t
	(x, x)	(x, y)		(x, t)
	(y, x)	(y, y)		(y, t)
			(z, z)	
	(t, x)	(t, y)		(t, t)

Relation R_4

Pour qu'une relation soit *transitive*, il faut qu'elle contienne (α, γ) si elle contient (α, β) et (β, γ), quels que soient α, β, γ.

La relation R_3 est *transitive* ; elle n'est pas non plus réflexive ; elle est antisymétrique. La relation R_4 est *transitive* ; elle est réflexive ; elle est symétrique.

NB : Le contraire de réflexif, symétrique, transitif est, respectivement, irréflexif, asymétrique, intransitif. Une relation est *irréflexive* si elle ne contient *aucun* élément de Δ ; elle est *asymétrique,* si elle n'est symétrique pour *aucun couple* ; elle est *intransitive* si elle n'est transitive pour aucune paire de couples ; c'est le cas de la relation R_5.

	x	y	z
x		(x, y)	
y			(y, z)
z	(z, x)		

Relation R_5

	x	y	z
x	(x, x)	(x, y)	(x, z)
y			(y, z)
z	(z, x)		

Relation R_6

Il faut se garder de confondre ces qualificatifs avec non réflexif (il y a des éléments dans la diagonale, mais non tous), non symétrique (il existe des éléments symétriques, mais tous ne le sont pas), non transitif (la transitivité existe pour certains couples, mais pas pour d'autres). La relation R_6 est, à la fois, non réflexive, non symétrique et non transitive.

1.1.2 Préordre. Équivalence. Ordre

a) une relation *réflexive* et *transitive* est une relation de *préordre*.

Exemple. Le Criterium des champions a donné les résultats suivants (tableau 1.1) :

1er	Camille	
2^{e} ex aequo	Anatole	
	Désiré	
4^{e}	Ernest	
5^{e}	Bernard	

Tableau 1.1

	A	B	C	D	E
A	(A, A)	(A, B)		(A, D)	(A, E)
B		(B, B)			
C	(C, A)	(C, B)	(C, C)	(C, D)	(C, E)
D	(D, A)	(D, B)		(D, D)	(D, E)
E		(E, B)			(E, E)

Tableau 1.2: relation *R*

Classons-les d'après la relation R « avoir obtenu un rang meilleur ou aussi bon que ». Dans le tableau 1.2, le couple (A, B) signifie qu'Anatole a obtenu un rang meilleur ou aussi bon que Bernard : $A \geq B$. La relation est évidemment réflexive, puisqu'elle contient la diagonale ; elle est aussi transitive puisque si X a obtenu un rang meilleur ou aussi bon que Y et Y un rang meilleur ou aussi bon que Z, X a évidemment un rang meilleur ou aussi bon que Z : $[X \geq Y$ et $Y \geq Z]$ entraîne $[X \geq Z]$. Mais elle n'est pas symétrique, bien que $A \geq D$ et $D \leq A$; par exemple, $A \geq E$, mais $E \not\leq A$; elle n'est pas non plus antisymétrique, puisque $[A \geq D$ et $D \geq A]$ n'entraîne pas $[A \equiv D]$ (Anatole ne peut pas être confondu avec Désiré).

b) une relation *réflexive*, *transitive* et *symétrique* est une **relation d'*équivalence*.**

Par exemple, envisageons deux groupes de droites parallèles : d'une part $A \parallel C$; d'autre part $B \parallel D \parallel E$. Le tableau 1.3 ci-dessous correspond à la relation $\parallel$: « être parallèle à ou confondu avec ». Le tableau 1.4, résulte de la partition des droites en classes d'équivalence. Il y a deux classes $\{A, C\}$ et $\{B, D, E\}$.

À titre d'exemple, reprenons maintenant le classement du Criterium des champions dans l'ordre d'arrivée (A et D étant indifférents). L'existence d'une relation l'équivalence (donc réflexive, symétrique et transitive), « avoir le même rang que », est manifeste pour A et D. Si l'on fait le *quotient* du préordre par cette relation d'équivalence, on trouve en réalité quatre classes ; $\{C\}$, $\{A, D\}$, $\{E\}$, $\{B\}$ et, désormais : $C > \{A, D\} > \{E\} > \{B\}$, la relation stricte S ayant le sens : « avoir un meilleur rang que ».

Posons $\{C\} = \alpha, \{A, D\} = \beta, \{E\} = \gamma$ et $\{B\} = \delta$; si l'on représente par le tableau 1.6 la relation sur l'ensemble $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, on constate qu'elle est irréflexive, asymétrique ; en revanche, elle est transitive.

	A	B	C	D	E
A	A, A		A, C		
B		B, B		B, D	B, E
C	C, A		C, C		
D		D, B		D, D	D, E
E		E, B		E, D	E, E

Tableau 1.3: relation ||

	A	C	B	D	E
A	A, A	A, C			
C	B, B	C, C			
B			B, B	B, D	B, E
D			D, B	D, D	D, E
E			E, B	E, D	E, E

Tableau 1.4: relation ||

	C	A	D	E	B
C	(C, C)	(C, A)	(C, D)	(C, E)	(C, B)
A		(A, A)	(A, D)	(A, E)	(A, B)
D		(D, A)	(D, D)	(D, E)	(D, B)
E				(E, E)	(E, B)
B					(B, B)

Tableau 1.5

	α	β	γ	δ
α	·	α, β	α, γ	α, δ
β	·	·	β, γ	β, δ
γ	·	·	·	γ, δ
δ	·	·	·	·

Tableau 1.6: relation S

c) Une relation *réflexive*, *antisymétrique*, *transitive* est, par définition, **une *relation* d'*ordre*** *(large par définition).*

Exemple. Considérons $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels privé du zéro, et la relation $x \mid y$ (x divise exactement y, sans reste), étant entendu que x divise x, quel que soit x $\mathbb{N}^*$. En raison de cette dernière hypothèse, la relation est réflexive (ce que l'on traduit en disant que l'ordre est large). Elle est évidemment transitive, car si $x \mid y$ et $y \mid z$, alors $x \mid z$. De plus, elle est antisymétrique : en effet si $x \mid y$ et $y \mid x$, c'est que $x = y$.

Soit $X = \{1, 2, 3, 5, 10, 20, 30\}$ une partie de $\mathbb{N}$. Le tableau 1.7 représente la relation $x \mid y$ sur cet ensemble.

	1	2	3	5	10	20	30
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,5)	(1,10)	(1,20)	(1,30)
2		(2,2)			(2,10)	(2,20)	(2,30)
3			(3,3)				(3,30)
5				(5,5)	(5,10)	(5,20)	(5,30)
10					(10,10)	(10,20)	(10,30)
20						(20,20)	
30							(30,30)

Tableau 1.7

On vérifie aisément sur le tableau la réflexivité et l'antisymétrie. On vérifie (moins facilement) la transitivité sur ce tableau par les "rectangles" dont un des sommets est sur la diagonale :

(1, 2)	...	(1, 10)	(1, 10)	...	(1, 30)	(1, 3)	...	(1, 30)
(2, 2)	...	(2, 10)	(10, 10)	...	(10, 30)	(3, 3)	...	(3, 30)
(1, 2)	...	(1, 30)	(5, 10)	...	(2, 30)	(1, 5)	...	(1, 20)
(2, 2)	...	(2, 30)	(10, 10)	...	(10, 30)	(5, 5)	...	(5, 20)
(1, 5)	...	(1, 10)	(5, 10)	...	(5, 30)	(1, 10)	...	(1, 20)
(5, 5)	...	(5, 10)	(10, 10)	...	(10, 30)	(10, 10)	...	(10, 20)
(1, 5)	...	(1, 30)	(1, 2)	...	(1, 20)	(2, 10)	...	(2, 20)
(5, 5)	...	(5, 30)	(2, 2)	...	(2, 20)	(10, 10)	...	(10, 20)
						(5, 10)	...	(5, 20)
						(10, 10)	...	(10, 20)

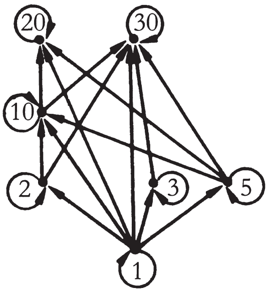


Figure 1.1

Ainsi le rectangle en haut à gauche se lit : 1/2 et 2/2 et 2/10 entraîne 1/10.

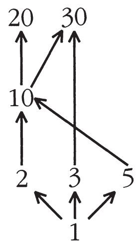


Figure 1.2

Contrairement à ce qui se passe pour le tableau 1.5, la partie supérieure du tableau (au-dessus de la diagonale) ne fait pas apparaître tous les couples. C'est qu'au sens de la relation tous les éléments ne sont pas deux à deux comparables. Ainsi, par exemple, on n'a pas $2 \mid 3$ ni $2 \mid 5$ (et pas davantage $3 \mid 2$ ou $5 \mid 2$).

On exprime ce fait en disant que l'ordre est *partiel*. Dans le cas contraire, l'ordre est *total*. La relation $\leqslant$ sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ (ou tout sous-ensemble de ceux-ci) est une relation d'ordre total. On peut donner une représentation « sagittale » de la relation (figure 1.1) :

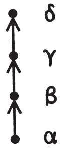


Figure 1.3

Deux éléments a et b, représentés chacun par un point, sont réunis par un arc si et seulement si $a \mid b$. Il y a autant d'arcs que de couples dans le tableau 1.7 soit 22, y compris 7 boucles. Mais on peut réduire le nombre de ces arcs, en supprimant ceux qui résultent de la réflexivité et de la transitivité. On obtient alors un *diagramme de Hasse* (fig. 1.2), plus lisible.

Le diagramme de Hasse d'un ensemble totalement ordonné est une *chaîne* (fig. 1.3) (en fait, en termes de graphes orientés, il s'agira d'un *chemin*).

À toute relation d'ordre large correspond une et une seule relation d'ordre *strict*. Une relation d'ordre strict est *irréflexive, asymétrique* et *transitive.* Elle peut induire un ordre partiel ou un ordre total.

Pour obtenir la représentation de la relation d'ordre strict correspondant à | (divise), c'est-à-dire la relation (divise et n'est pas égal), il suffit de supprimer la diagonale du tableau 1.7 et les boucles (arcs fermés sur eux-mêmes) de la fig. 1.1. Ici, l'ordre strict n'est que partiel (tout comme l'ordre large d'où il provient).

À toute relation d'ordre $\leq$ (ou $<$) correspond une relation converse $\geq$ (ou $>$).

Le diagramme de Hasse (fig 1.2) s'obtient en supprimant dans la fig. 1.1, les boucles et les arcs de transitivité : ainsi 1 divise 2 et 2 divise 10 entraîne 1 divise 10 : l'arc (1,10) est un arc de transitivité.

1.1.3 Éléments particuliers d'un ensemble ordonné

Un ensemble sur lequel est définie une relation d'ordre (partiel ou total) est nommé *ensemble ordonné* (partiellement ou totalement).

Certains éléments particuliers des ensembles partiellement ordonnés jouent un grand rôle en recherche opérationnelle.

Considérons un ensemble X, partiellement ordonné par la relation $\leq$ (être inférieur ou égal à) et une partie P de cet ensemble. S'il existe (bien noter cette restriction) :

a) Un élément m de X qui est inférieur ou égal à tout élément x de P, m est un *minorant* de P.

Un élément M de X qui est supérieur ou égal à tout élement x de P, est un *majorant* de P.

b) Un élément M de P, tel qu'il n'existe pas d'éléments de P supérieur à M, est un *élément maximal* de P.[1]

Un élément m de P, tel qu'il n'existe pas d'éléments de P inférieur à M, est un *élément minimal* de P.

De même les éléments définis ci-dessous peuvent exister ou ne pas exister :

c) Le *plus grand élément* E (ou encore : *le maximum*) de P est l'élément de P, tel que, pour tout $x \in P$, on a : $E \geq x$.

Le *plus petit élément* e (ou encore : *le minimum*) de P est l'élément de P, tel que, pour tout $x \in P$, on a : $e \leq x$.

d) La *borne supérieure* (b.s.) B de P (ou *supremum* de P, notée aussi sup P) est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de P.

La *borne inférieure* (b.i.) b de P (ou *infimum* de P, notée aussi inf P) est le plus grand élément de l'ensemble des minorants de P.

e) L'*élément universel* de X est le plus grand élément de X.

L'*élément nul* de X est le plus petit élément de X.

1. L'Académie des sciences recommande d'employer les termes « maximum, minimum, optimum » uniquement comme substantifs ; les adjectifs correspondants étant « maximal, minimal, optimal ». Ainsi on doit dire « élément maximal » (et non pas « élément maximum »).

Insistons sur le fait que les éléments particuliers définis en a), b), c), d) et e) n'existent pas nécessairement dans un ensemble partiellement ordonné, ce qui est illustré par l'exemple ci-dessous.

Exemples. Soit $X = \{1, 2, 3, 5, 10, 20, 30\}$ un ensemble partiellement ordonné par la relation $x \mid y$ (x divise y). Nous invitons le lecteur à se reporter au diagramme de Hasse associé (Fig. 1.2).

1. Prenons $P = \{2, 3, 5, 10\}$. P est inclus dans X

Il existe un majorant de P : 30, un minorant : 1, deux éléments maximaux : 3 et 10, trois éléments minimaux : 2, 3, 5, ni plus grand élément, ni plus petit élément de P. La b.s. de P est 30, la b.i. est 1. X n'admet pas d'élément universel, mais un élément nul : 1.

2. Prenons maintenant $P = \{2, 5, 10\}$.

P compte trois majorants : 10, 20, 30, un minorant : 1, un élément maximal : 10, deux éléments minimaux : 2 et 5, un plus grand élément : 10, pas de plus petit élément. La borne supérieure de P est 10, la borne inférieure est 1.

Pour une partie réduite à deux éléments (ou « paire ») $\{x, y\}$, d'un ensemble ordonné, il peut exister une borne supérieure et/ou une borne inférieure ; la b.s., lorsqu'elle existe, est notée $x \vee y$ et la b.i. par $x \wedge y$.

1.1.4 Treillis

a) On appelle *treillis* (ou encore *lattis* ou ensemble *réticulé*) un ensemble partiellement ordonné dans lequel, pour toute paire d'éléments, existent une borne supérieure (b.s.) et une borne inférieure (b.i.).

À cette définition on peut substituer la définition axiomatique suivante. Soit un ensemble T, dont les éléments sont munis de deux lois de composition, $\vee$ et $\wedge$, vérifiant, quels que soient x, y et $z \in T$, les propriétés ci-après :

1. $x \vee y = y \vee x$	(commutativité)	1′. $x \wedge y = y \wedge x$
2. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	(associativité)	2′. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
3. $x \vee x = x$	(idempotence)	3′. $x \wedge x = x$
4. $x \vee (x \wedge y) = x$	(absorption)	4′. $x \wedge (x \vee y) = x$

alors T constitue un ensemble ordonné par la relation $\leq$ telle que :

5. $[x \leq y]$ équivaut à $[x \wedge y] = x$ et équivaut à $[x \vee y] = y$.

On appelle alors T un *treillis*. On peut aisément démontrer l'équivalence de ces deux définitions.

Exemple. Considérons, par exemple, les diviseurs de 30 : 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 (ils sont au nombre de 8 car $(1 + 1)\cdot(1 + 1)\cdot(1 + 1) = 8$ et $30 = 2^1\cdot 3^1\cdot 5^1$), ordonnés par la relation $x \mid y$ (x divise y). Rappelons que si, $n = p^\alpha\cdot q^\beta\cdot r^\gamma\cdots$ est la décomposition en produit de facteurs premiers de l'entier $n (n \geqslant 2)$, alors n admet $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)\cdots$ diviseurs (y compris 1 et n).

Ces díviseurs forment un treillis dont le diagramme de Hasse est donné par la figure 1.4. La b.s. de deux éléments quelconques est leur p.p.c.m ; la b.i., leur p.g.c.d. Ainsi : $5 \vee 6 = 5 \times 6 = 30$ et $5 \wedge 6 = 1$; $6 \vee 15 = 2 \times 3 \times 5 = 30$ et $6 \wedge 15 = 3$, etc.

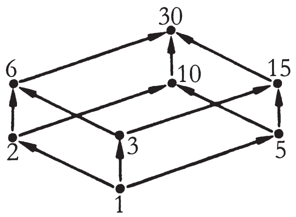


Figure 1.4

L'élément universel de ce treillis est 30, l'élément nul, 1. D'une manière générale $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$, ordonné par la relation $x \mid y$ (x divise y), présente une structure de treillis infini. L'élément nul est toujours 1 ; il n'y a pas d'élément universel. On montre que tout treillis T ayant un nombre fini d'éléments comporte un élément nul et un élément universel.

b) Un treillis, comportant un élément nul et un universel, que nous désignerons, respectivement par n et U, est *complémenté* si, à tout élément x de T, on peut associer au moins un élément de T, noté $\bar{x}$ tel que :

$$6.\ x \vee \bar{x} = U \quad \text{et} \quad 6'.\, x \wedge \bar{x} = n.$$

Le treillis de la figure 1.4 est complémenté. En effet : $1 \vee 30 = 30, 1 \wedge 30 = 1$; $2 \vee 15 = 30, 2 \wedge 15 = 1$; $3 \vee 10 = 30, 3 \wedge 10 = 1$; $5 \vee 6 = 30, 5 \wedge 6 = 1$. Ainsi $n = 1$ est le complément de $U = 30$ et réciproquement ; de même 3 et 10 sont le complément l'un de l'autre, tout comme 5 et 6.

Propriété. *On a, d'après* 4 : $x \wedge (x \vee \bar{x}) = x$. *Or,* $x \wedge (x \vee \bar{x}) = x \wedge U = x$. *D'où* :

$$x \wedge U = x.$$

De même :

$$x \vee n = x.$$

N.B. *Le système d'axiomes* (1 à 4), ($1'$ à $4'$) *n'est pas minimal; mais il est pratique pour le calcul. On peut, en effet, montrer que l'absorption entraîne l'idempotence.*

c) Un treillis est distributif lorsqu'aux axiomes 1 à 4 et $1'$ à $4'$, s'ajoute le suivant :

$$7.\ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \text{ quels que soient } x, y \text{ et } z \in T.$$

Cet axiome entraîne (cf. Execrcice 1 ci-dessous) :

$$7'.\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Inversement, $7'$ entraîne 7.

Exercices.

1. Soit à démontrer, à partir des axiomes 1 à 4, $1'$ *à* $4'$ *et* 7, que :

$$7'.\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Grâce à 4, on peut écrire le premier membre de $7'$ sous la forme :

$$[x \vee (x \wedge y)] \vee (y \wedge z), \text{ en remplaçant } x \text{ par } x \vee (x \wedge y).$$

Grâce à 2, cette expression est égale à :

$$x \vee [(x \wedge y) \vee (y \wedge z)] \text{ (par associativité de } \vee \text{)}.$$

et, en vertu de $1'$, elle est aussi égale à :

$$x \vee [(y \wedge x) \vee (y \wedge z)] \text{ (par commutativité de } \wedge \text{)}.$$

De ce fait, grâce à 7, le crochet est égal à $y \wedge (x \vee z)$ et cette expression devient :

$$x \vee [(y \wedge (x \vee z)]$$

Remplaçons x par sa valeur d'après $4'$; l'expression devient :

$$[x \wedge (x \vee z] \vee [(y \wedge (x \vee z)];$$

il vient alors, en appliquant 7 :

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) \text{ (par distributivité).}$$

et c'est précisément le deuxième membre de $7'$, qu'il fallait obtenir *par un calcul fondé sur les seuls axiomes 1 à 7 et 1′ à 6′*.

2. Dans un treillis distributif, la complémentation est unique.

Raisonnons par l'absurde et supposons que l'élément x ait deux compléments différents, $\bar{x}$ et x^* ; on aurait :

$$x \vee \bar{x} = x \vee x^* = U$$

et

$$x \wedge \bar{x} = x \wedge x^* = n, \text{avec } \bar{x} \neq x^*$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \bar{x} = \bar{x} \wedge U = \bar{x} \wedge (x \vee x^*) &= (\bar{x} \wedge x) \vee (\bar{x} \wedge x^*) \\ &= n \vee (\bar{x} \wedge x^*) = \bar{x} \wedge x^*, \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} x^* = x^* \wedge U = x^* \wedge (x \vee \bar{x}) &= (x^* \wedge x) \vee (x^* \wedge \bar{x}) \\ &= n \vee (x^* \wedge \bar{x}) = x^* \wedge \bar{x} = \bar{x} \wedge x^* \end{aligned}$$

Finalement $\bar{x} = x^*$, contrairement à l'hypothèse et ainsi la complémentation est unique.

d) Un treillis à la fois distributif et complémenté est appelé *treillis de Boole*. Il est isomorphe à une *algèbre de Boole*.

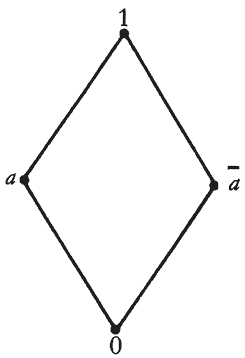


Figure 1.5

Une algèbre de Boole B est donc un ensemble partiellement ordonné, doté d'un élément nul et d'un élément universel, dont les éléments vérifient les axiomes 1 à 4; $1'$ à $4'$; 6, $6'$ et 7 (et donc aussi $7'$).

La relation d'ordre est définie par l'une des quatre relations équivalentes suivantes :

5^*. $x \leq y$ équivaut à $x \wedge y = x$ ou $x \vee y = y$ ou
$$x \wedge \bar{y} = 0 \text{ ou } \bar{x} \vee y = 1$$
0 et 1 désignant, respectivement, n et U.

Une algèbre de Boole comportant un seul *générateur a,* différent de 0 et de 1, comporte quatre éléments (fig. 1.5).