René Husson • Claude Iung
Jean-François Aubry • Jamal Daafouz
Didier Wolf

AUTOMATIQUE

Du cahier des charges à la réalisation de systèmes

DUNOD

Ont également participé à cet ouvrage :
(par ordre alphabétique)

Thierry Bastogne, Maître de conférences à l'UHP, pour le chapitre 8 « Modélisations à base de composants ».

Michel Dufaut, Professeur à l'ENSEM, pour le chapitre 12 « Traitement du signal ».

Marc Gabriel, Professeur émérite à l'UHP, pour le chapitre 18 « Maintenance ».

Valérie Louis-Dorr, Maître de conférences à l'ENSEM, pour une partie du chapitre 13 « Instrumentation ».

Didier Maquin, Professeur à l'INPL, pour une partie du chapitre 16 « Surveillance et diagnostic » et une partie du chapitre 19 « Boîte à outils ».

Benoît Marx, Maître de conférences à l'ENSG pour une partie du chapitre 16 « Surveillance et diagnostic ».

José Ragot, Professeur à l'ENSG, pour une partie du chapitre 16 « Surveillance et diagnostic ».

Radu Ranta, Maître de conférences à l'ENSEM, pour une partie du chapitre 13 « Instrumentation ».

Alain Richard, Professeur à l'UHP, pour le chapitre 6 « Suites et processus aléatoires ».

Pierre Riedinger, Maître de conférence à l'ENSEM, pour le chapitre 11 « Méthodes d'optimisation ».

Illustration de couverture :
Robot soudage en usine © istockphoto.com/Olga Serdyuk

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-075971-2

Préface

Comme le rappelle cet ouvrage, la pratique de l'automatique remonte à l'Antiquité. Héritière des modèles de la physique, s'appuyant sur les applications des mathématiques et de l'informatique, l'automatique a progressivement étendu ses méthodes à un grand nombre de champs disciplinaires. Elle est devenue progressivement une partie intégrante et incontournable des sciences de l'ingénieur. Mais peut-on parler de discipline à son sujet tant son champ d'application est vaste et varié (méthodes d'optimisation, commande des machines, diagnostic...) ? Même l'analyse financière ou la biologie peuvent recourir à ses méthodes ou contribuer à enrichir ses modèles.

Le XX^{e} siècle nous a éloignés de la croyance naïve en la toute puissance de la mécanique rationnelle et de quelques lois physiques simples et fondamentales dans la modélisation du monde naturel ou créé par l'Homme. C'est justement la complexité croissante des modèles et leur caractère interdisciplinaire qui placent l'automatique dans une position centrale.

La complexité des problèmes auxquels l'automatique est confrontée rend d'autant plus ardue la tâche de ceux qui veulent s'initier à ses modèles et méthodes. Même quand il veut approfondir les questions, un ouvrage de vulgarisation ne peut que survoler les problèmes. À l'inverse, un ouvrage spécialisé n'abordera qu'un champ restreint laissant le lecteur dans l'ignorance de la richesse des ressources offertes par l'automatique. Une encyclopédie peut surmonter ce type de difficulté mais au prix d'un alourdissement considérable de l'ouvrage risquant de provoquer la lassitude du lecteur. En fin de compte elle devra, elle aussi, renvoyer à des ouvrages spécialisés.

En évitant ces écueils, le présent ouvrage réalise une synthèse originale entre initiation et formation. Il propose au lecteur dans presque chaque champ de l'automatique une initiation solide qui procure une culture de base indispensable à une approche ouverte des problèmes auxquels l'ingénieur peut être confronté. La volonté de limiter le volume à un seul tome a conduit à exclure provisoirement l'informatique industrielle. Le lecteur intéressé pourra se reporter aux ouvrages spécialisés sur le temps réel, les réseaux programmables, les automates industriels...

La présentation des modèles part des applications et justifie pleinement l'effort d'abstraction nécessaire. La lecture de l'ouvrage n'est pas nécessairement linéaire. Nul doute qu'une telle approche donne au lecteur le goût de poursuivre et d'approfondir le champ qui l'intéresse. Une bibliographie récente le guide dans cette démarche. Une boîte à outils placée en fin d'ouvrage prend en compte la diversité des parcours de formation et permet au lecteur de se remettre en mémoire quelques éléments de calcul matriciel, d'algèbre de Boole ou de théorie des graphes.

Vivant, évolutif, cet ouvrage rénove la notion traditionnelle d'ouvrage de référence. L'extrême richesse des thèmes traités donne au lecteur une représentation saisissante des outils mis à la disposition des ingénieurs pour résoudre des problèmes industriels de plus en plus complexes.

Le développement de la science et de la technologie, la complexité des problèmes abordés rendent impossible la concentration de compétences diversifiées et de haut niveau sur un tout petit nombre d'individus. L'évolution très rapide des connaissances et des méthodes fait que le temps n'est plus à la rédaction par un ou deux auteurs d'ouvrages sur le large champ de connaissances des sciences de l'ingénieur. C'est tout le mérite des enseignants de l'ENSEM (École Nationale Supérieure d'Électricité et de Mécanique de Nancy) d'avoir su mettre en place dans la durée un travail collaboratif exemplaire par sa qualité et le nombre des intervenants. Leur grande expérience pédagogique en école d'ingénieurs leur a permis de proposer une initiation aux difficultés graduées allant du concret vers l'abstrait.

La visée pédagogique de l'ouvrage le destine aux étudiants en école d'ingénieurs, aux étudiants de l'enseignement supérieur en transition vers les carrières d'ingénieurs, à tous ceux qui, engagés dans la vie active, sont amenés par la nature de leurs travaux ou la nécessité d'une évolution de carrière à enrichir leurs compétences en automatique. Les applications étant au cœur de l'ouvrage, les étudiants titulaires d'un BTS ou DUT et envisageant une poursuite d'études peuvent tester leur appétence pour les domaines abordés grâce à une transition progressive vers l'abstraction.

Les carrières de l'enseignement ne doivent pas non plus être oubliées : un candidat à l'agrégation de Physique Appliquée ou de Génie Électrique y trouvera l'occasion d'enrichir sa vision d'un champ disciplinaire. Un enseignant de classes préparatoires y puisera de précieux renseignements sur les contenus de formation actuels en école d'ingénieurs et les compétences intellectuelles auxquelles il doit préparer ses étudiants. Cet ouvrage est aussi un excellent moyen pour un enseignant en BTS Contrôle Industriel et Régulation automatique de parfaire ou d'actualiser ses connaissances.

Pierre MALLÉUS
Inspecteur Général de l'Education Nationale

Table des matières

Partie I

Les Modèles (Structure et Analyse)

Chapitre 1

Introduction

L'automatique s'intéresse aux systèmes. Constitués d'ensembles naturels (bancs de harengs) ou artificiels (avions), les systèmes évoluent au cours du temps en fonction de sollicitations extérieures. Ces sollicitations sont appelées entrées. Lorsque ces entrées peuvent être créées pour piloter le système, on les appelle commandes ou entrées de commande ou encore entrées, (bruit pour diriger le banc de harengs, angle de la gouverne de profondeur de l'avion), lorsque ces entrées sont indépendantes de la volonté de l'automaticien on les appelle perturbations (présence d'un prédateur, trou d'air), les informations disponibles sur le système sont appelées sorties (information sonar, angle de piqué), figure (1.1). Le rôle de l'automaticien est de concevoir le contrôle des systèmes. Sous ce nom très général, on trouve des actions très différentes : maintien de l'avion en vol horizontal à vitesse constante (action de régulation), orientation du banc de harengs vers les filets de pêche (action de pilotage ou de commande), calcul de la trajectoire que doit suivre l'avion pour économiser le carburant tout en arrivant à l'heure (action de planification, d'optimisation), évaluation de la pression dans une canalisation en l'absence de capteur (action d'observation), dire que le fonctionnement du réacteur est parfait ou au contraire annoncer le fonctionnement défectueux d'un organe (action de diagnostic ou de surveillance). Pour mener à bien ces différentes tâches, on utilise les informations fournies par les sorties et on élabore les commandes si l'action l'exige.

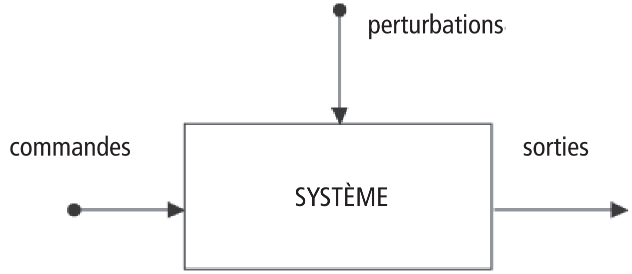

Figure 1.1 Un système et ses liaisons avec l'extérieur.

On comprend aisément que la connaissance des sorties ne permet que très rarement d'aboutir. Il est nécessaire de posséder des informations sur le comportement du système sous l'influence des commandes, des perturbations, du temps, et comment cette évolution se traduit au niveau des sorties. L'ensemble de ces informations constitue le modèle.

1.1 LA NOTION DE MODÈLE

Définition 1.1 (modèle) *Le modèle est l'ensemble des informations qui permettent de calculer l'évolution d'un système en fonction des entrées qui lui sont appliquées.*

Cette définition très générale appelle quelques commentaires :

- les modèles peuvent être de nature très variées : équations, tables, cartes, modèle linguistique.
  Un modèle simple pour réguler la température :
  Parmi les régulations que nous avons tous rencontrées figure sûrement celle de la température d'une pièce. La partie visible est le thermostat sur lequel on affiche la température désirée. Les modèles de thermostats les plus simples jouent à la fois les rôles de capteur et de régulateur. Pendant longtemps un thermostat a été constitué d'un système à bilame qui ouvrait un circuit électrique quand la chaleur atteignait un certain stade et fermait celui-ci dès que l'on descendait en dessous de cette même température. Cette régulation est fondée sur un modèle élémentaire de la température d'une pièce : si on chauffe, la température augmente, si on ne chauffe pas la température diminue !
- les modèles ne prétendent pas être une vérité (*cf.* § 1.1.1) mais un outil de représentation plus ou moins imparfait. La confusion est entretenue par l'usage. En effet, bien que le modèle ne soit pas le système, on utilise souvent le mot « système » au lieu du mot « modèle » pour parler d'une classe particulière : « système linéaire » (qui n'existent pas dans la nature) au lieu de « système à modèle linéaire ».
- un même système peut être représenté par des modèles de natures différentes.
- un modèle n'a de sens véritable que par l'utilisation que l'on en fait. Un « bon modèle » est celui qui est le mieux adapté à son utilisation.
- un modèle a en général un domaine de validité, en conséquence plusieurs modèles pourront être nécessaires pour décrire un fonctionnement.
- la simulation d'un système est la résolution de son modèle.
- l'identification est la technique utilisée pour rechercher les valeurs des paramètres d'un modèle.

1.1.1 Lois et Modèles

Le problème n'est pas simple. Il suffit de lire la première ligne de mots clés de la section 2 du CNRS qui s'intitulait « Théories physiques : méthodes, modèles et applications » pour trouver : « Lois et interactions fondamentales ». Pour une discussion sur les « lois physiques » on pourra se reporter au livre de Christian Magnan « La nature sans foi ni loi » et au condensé : `http://www.dstu.univ-montp2.fr/GRAAL/perso/magnan/Nature209.html`. Pour une discussion sur la nécessité des modèles, citons un extrait du dossier : « Les modèles de l'Univers » `http://www.astrosurf.org/lombry/cosmos-modelesunivers.html` du projet LUXORION : « En bousculant la symbolique Kantienne, les chercheurs qui désiraient étudier l'Univers, déterminer les lois qui le gouvernent, expliquer la formation et l'évolution des galaxies, ont dû imaginer des « modèles » qui le représentaient, modèles hypothétiques qui englobaient toutes les propriétés connues de l'Univers. Ces modèles sont des conceptions abstraites, mathématiques, où les sensations sont absentes. Elles n'ont rien à voir avec la réalité... »

1.1.2 Comment classer les modèles ?

La définition (1.1) peut s'appliquer à des quantités de modèle de nature et de forme différentes. On imagine bien que les méthodes qui seront développées pour concevoir et réaliser le contrôle vont dépendre de ces modèles. Il est donc intéressant de savoir si une classification peut aider dans la recherche d'une méthode adaptée. Des critères de classement divers ont été énoncés. Considérons en quelques-uns :

> ***Soyez vigilant :*** Les variables ne sont pas des constantes, ce sont des fonctions du temps (normal si on veut qu'elles varient !). Il faut distinguer la variable x de la valeur $x(t)$ qu'elle prend à un instant donné.

1. Nature des variables qui interviennent pour décrire le fonctionnement du système, ses entrées et ses sorties :
   - variables réelles ($\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$) : systèmes continus.
   - variables logiques $\{0; 1\}^n$: systèmes séquentiels ou à événements discrets.
   - variables réelles et variables logiques : systèmes hybrides.
   - variables aléatoires : systèmes stochastiques.
2. Nature de la variable temps :
   - variable réelle : $\mathbb{R}$: systèmes à temps continu.
   - variable discrète : $\mathbb{N}$: systèmes à temps discret, systèmes échantillonnés.
3. Nature des équations :
   - équations différentielles : systèmes différentiels, systèmes à constantes localisées.
   - équations aux dérivées partielles : systèmes à constantes réparties.
   - équations aux différences : systèmes discrets.
   - équations linéaires : systèmes linéaires.
   - équations non linéaires : systèmes non linéaires.
4. Manière d'obtenir le modèle :
   - à partir de lois physiques : modèle de connaissance.
   - *a priori* (on ne se préoccupe pas de la réalité physique du système, mais on cherche la représentation qui nous convient le mieux pour décrire le phénomène) : modèle de représentation.

5. Nature des informations fournies par le modèle :
   - information sur la relation entre les entrées et les sorties : modèle entrée-sortie.
   - information sur les variables internes (pas forcément mesurables) : modèle d'état.

Vous retrouvez ces classes de modèles en titre de livre ou en tête de chapitre comme dans cet ouvrage, en tout cas comme mots-clés en automatique. Comme ces classes sont faites sur des critères différents, rien n'empêche d'en associer plusieurs : systèmes linéaires échantillonnés. La conception du contrôle est presque toujours faite en utilisant un modèle, il faudra donc s'assurer, de préférence avant de mettre en route, que ce contrôle fonctionnera encore correctement sur le système dont le comportement n'est pas exactement celui prévu par le modèle. C'est le problème de la robustesse qui doit être un souci constant de l'automaticien. Certaines conceptions, très performantes sur le papier, ont connu des échecs retentissants par défaut de robustesse.

1.2 LES SYSTÈMES DYNAMIQUES

1.2.1 Définitions

Malgré la diversité des modèles, on s'aperçoit assez rapidement d'analogies de comportement entre des systèmes de natures très différentes : systèmes à événements discrets et systèmes continus par exemple. Existe-t-il une théorie générale ? Nous n'avons pas la réponse à cette question, mais une notion assez générale permet de réunir des modèles très différents et de découvrir que la même méthode (la programmation dynamique) peut s'appliquer aussi bien à la recherche d'un chemin dans un graphe que dans le problème de la commande optimale de systèmes continus. C'est la notion de systèmes dynamiques.

Cette notion est malheureusement très souvent donnée de manière très restrictive (par les mécaniciens) et se limite aux systèmes différentiels, lui faisant perdre ainsi l'essentiel de son intérêt.

La notion de système dynamique repose sur la notion d'état. On fait l'hypothèse qu'il existe un ensemble de variables dont la connaissance à un instant donné permet le calcul de l'évolution future, si on connaît les entrées. Cette notion est naturelle pour les modèles différentiels ; on sait que la solution d'une équation différentielle d'ordre n dépend de n conditions initiales. Lorsque ces conditions initiales sont connues, la solution de l'équation différentielle est complètement déterminée. Elle est aussi valable pour bien d'autres systèmes dont nous donnerons quelques exemples. Elle n'exclut ni les systèmes chaotiques, ni les systèmes stochastiques.

> ***Remarque :*** Le chaos est cartésien. Un système chaotique est un système dynamique régi par des équations différentielles dont les solutions sont extrêmement sensibles aux variations des conditions initiales, au point qu'elles en deviennent imprévisibles.

On appellera X, l'ensemble des valeurs prises par ces variables, cet ensemble peut être fini :$\{0; 1\}$ pour des variables booléennes, infini : intervalle de $\mathbb{R}$, de dimension finie : $\mathbb{R}^n$ et même de dimension infinie.

Il faut aussi :

- préciser l'ensemble des instants pendant lesquels on s'intéresse au système. C'est un ensemble ordonné de réels que l'on notera T. Cela signifie que lorsqu'on a deux instants t_1 et t_2, on est capable de dire lequel suit ou précède l'autre.
- indiquer les valeurs des entrées du système, on notera U l'ensemble qui les contient ; exemple : l'intervalle [−10 volts, +10 volts] pour une tension d'entrée.
- définir les entrées admissibles groupées dans l'ensemble noté Ω. Ce sont les fonctions de T dans U acceptables pour le système ; exemple : les fonctions constantes sur les intervalles $[kT_e, (k+1)T_e[$ pour une régulation numérique de période T_e.
- définir les valeurs des sorties : ensemble Y.
- définir les fonctions de sorties $\gamma(x, t, u)$: c'est-à-dire comment calculer les sorties avec l'état, le temps et la commande.
- exprimer la phrase « on peut calculer l'évolution future... ». C'est la clé du système dynamique : il est caractérisé par sa fonction de transition d'état $\varphi(t, t_0, x(t_0), \omega)$, fonction qui fournit la valeur de l'état à tout instant t qui suit un instant t_0 pour lequel on connaît la valeur de l'état $x(t_0)$ et la commande ω appliquée sur l'intervalle $[t_{0,}t]$. Cette fonction ne peut pas toujours être écrite de manière simple : on ne sait pas, en général, écrire analytiquement la solution d'une équation différentielle non linéaire, mais on sait que moyennant quelques hypothèses, cette solution existe et est unique pour des conditions initiales données. On remarque que seules les valeurs de l'entrée entre t_0 et t ont une importance ; il est inutile de connaître ces valeurs avant t_0 (notion d'état), ni après t (notion de causalité). L'ensemble des valeurs $\{t, \varphi(t, ., ., .)\}$ constitue un ensemble appelé trajectoire du système.

1.2.2 Quelques exemples

Selon les ensembles que nous venons de définir, on obtient différents types de modèles

Ensembles	Systèmes différentiels	Systèmes séquentiels	Systèmes échantillonnés
T	$\mathbb{R}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$
X	$\mathbb{R}^n$	$\{0,1\}^n$	$\mathbb{R}^n$
U	$\mathbb{R}^m$	$\{0,1\}^m$	$\mathbb{R}^m$
Ω	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$	$\mathbb{N} \to \{0,1\}^m$	suites : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^m$
Y	$\mathbb{R}^q$	$\{0,1\}^q$	$\mathbb{R}^q$

auxquels on peut apporter quelques précisions :

Système à temps continu	$T = \mathbb{R}$
Système à temps discret	$T = \mathbb{N}$
Système de dimension finie	X est un espace de dimension finie
Systèmes à états finis	X est fini
Système fini	X, U, Y, sont des ensembles finis

Le système dynamique Σ est dit *libre* si Ω a un seul élément.

Nous allons illustrer ces notions par quelques exemples concrets très simples :

a) *Systèmes différentiels*

L'évolution des systèmes décrits par une équation différentielle est complètement définie par un nombre de variables égal à l'ordre de l'équation différentielle. On dit que la solution dépend de n constantes d'intégration. Nous prendrons comme exemple un dispositif classique qui nous servira pour illustrer les notions que nous présenterons aux chapitres 1 et 2.

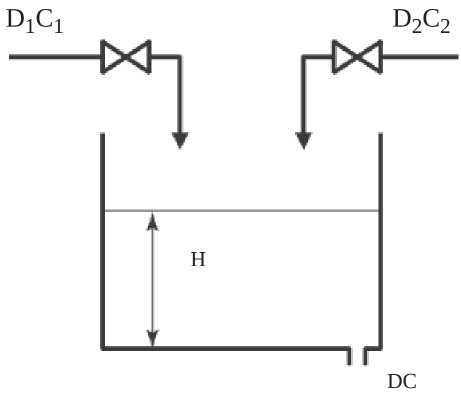

Figure 1.2 Schéma d'un mélangeur idéalisé.

Il s'agit d'un mélangeur parfait illustré par la figure (1.2) : on suppose que le mélange des produits s'effectue de manière instantanée et que la concentration C du produit dissout dans le bac est homogène. L'objectif du contrôle est de régler le niveau H et la concentration C du soluté. Le bac est cylindrique de section S. Il est alimenté par deux sources de concentration C_1 et C_2 dont on contrôle les débits D_1 et D_2 grâce à deux vannes. On étudiera deux modes de fonctionnement :

Mode 1 : *V1*. On admettra que le débit de sortie est $D(t) = k\sqrt{H(t)}$.

Mode 2 : *V2*. On considère que le débit de sortie est une perturbation.

Pour *V1* les entrées de commande sont D_1 et D_2 (ouverture des vannes, ou commande des vannes...) et les sorties sont : H et C.

Pour *V2* les entrées de commande sont D_1 et D_2, l'entrée de perturbation est D et les sorties sont H et C.

On obtient aisément les équations de ce système en écrivant les deux équations de conservation de la masse :

- conservation de la masse totale

$$S\frac{dH}{dt} = D_1 + D_2 - D \tag{1.1}$$

- conservation de la masse du produit dissout

$$\frac{d(SHC)}{dt} = SH\frac{dC}{dt} + SC\frac{dH}{dt} = C_1D_1 + C_2D_2 - CD \tag{1.2}$$

ou encore en remplaçant dans (1.2) $\frac{dH}{dt}$ par sa valeur tirée de (1.1) :

$$SH\frac{dC}{dt} = C_1D_1 + C_2D_2 - CD_1 - CD_2 \tag{1.3}$$

Ces équations nous indiquent que deux variables sont nécessaires et suffisantes pour calculer l'évolution des sorties (les entrées sont supposées connues). Donc l'espace d'état est $\mathbb{R}^2$ et deux variables d'état naturelles sont H et C.

De nombreux systèmes physiques sont modélisés par des modèles différentiels. Des techniques fondées sur les échanges d'énergie permettent de construire les modèles de systèmes physiques complexes constitués de sous systèmes interconnectés (chapitre 8)

b) Systèmes à temps discret

Considérons un compte d'épargne. On supposera que la période de calcul est la quinzaine et que le taux de rapport par quinzaine est fixe soit a.

$$M_n = M_{n-1}(1 + a) + s_n \tag{1.4}$$

À la quinzaine numéro n, on est donc capable de calculer le montant disponible sur le compte (M_n), si on connaît la somme initiale (M_0) à la quinzaine 0 (date d'ouverture du compte) et la suite des sommes déposées, $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

$T = \mathbb{N}$ est l'ensemble des numéros de quinzaines.

s_i sont les valeurs de l'entrée $U = \mathbb{Z}$.

Ω est l'ensemble des suites $s : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

On voit sur l'équation (1.4) que pour calculer la valeur du compte à une date donnée il faut connaître cette valeur à la quinzaine précédente. Cette valeur est nécessaire et suffisante. L'espace d'état est de dimension 1, $X = \mathbb{Z}$.

Lorsque la commande d'un système est réalisée par ordinateur (figure 1.3), les commandes élaborées par un algorithme sont appliquées par l'intermédiaire d'un convertisseur numérique-analogique et sont maintenues constantes pendant la période d'échantillonnage T. Les fonctions $u(.)$ ont une forme particulière : fonctions en escalier, constantes sur l'intervalle d'échantillonnage.

$$u(t) = u_k;\ \forall t \in [kT, (k+1)T] \tag{1.5}$$

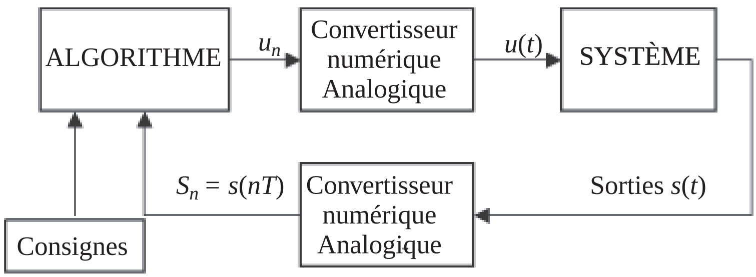

Figure 1.3 Schéma d'une régulation numérique.

L'état du système et les sorties sont des variables continues, mais au niveau de l'algorithme on ne manipule que des suites. On utilisera alors une équation d'état discrète faisant intervenir les valeurs de l'état aux instants d'échantillonnage $x_n = x(nT)$. Elle prendra la forme (1.6) :

$$x_{n+1} = f(x_n, u_n) \tag{1.6}$$

c) *Systèmes à événements discrets*

Pour contrôler le patinage d'une roue ou pour commander le mécanisme d'entraînement d'une bande magnétique il est indispensable de connaître le sens du mouvement. Ceci se réalise de manière très simple, de la façon suivante : un disque dont une moitié est opaque (figure 1.4), est solidaire de l'arbre du moteur d'entraînement et tourne devant deux cellules photoélectriques c_1 et c_2. Ces cellules seront éclairées ou non selon qu'elles sont devant la partie transparente ou la partie opaque du disque. Quand elles sont éclairées $c_i = 1$ et 0 sinon.

Il est évident que la seule connaissance des états des deux cellules, éclairées ou non, ne suffit pas à déterminer le sens de rotation. La séquence des signaux intervient.

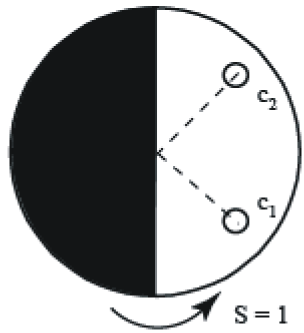

Figure 1.4 Détecteur de sens de rotation.

$$T = \mathbb{R}$$

Les entrées sont c_1 et c_2, ces variables sont binaires et ne prennent que deux valeurs : éclairées ou non éclairées.

$$\Omega = \{\mathbb{R} \to [0;1]^2\}$$

La sortie S est le sens de rotation. On ne pourra savoir le nombre de variables d'état qu'après avoir fait la synthèse de l'automate qui détermine le sens de rotation.

Le système comporte 4 états par sens de rotation. On montre que deux variables d'état $(x_{1,}x_2)$ suffisent pour décrire l'évolution du système. Les futures valeurs (x_1^+, x_2^+) prises par l'état quand les entrées changent, sont exprimées en fonction des valeurs, à l'instant présent, de ces mêmes variables d'état et des entrées. La sortie S à l'instant présent est donnée par l'état et les entrées, à l'instant présent. Les équations du système sont :

$$\begin{aligned} x_1^+ &= c_2x_1 + c_1c_2 + c_1x_1 \\ x_2^+ &= \overline{c_1}x_2 + \overline{c_1}c_2 + c_2x_2 \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$S = \overline{x_1x_2c_1} + \overline{x_1}x_2c_2 + x_1x_2c_1 + x_1\overline{x_2c_2} \tag{1.8}$$

d) *Systèmes Dynamiques Hybrides*

La description du fonctionnement de certains systèmes nécessite l'utilisation de variables continues et de variables booléennes. Ces systèmes sont appelés systèmes dynamiques hybrides. On les rencontre dans tous les secteurs industriels. Donnons un exemple élémentaire.

On considère la commande du remplissage d'un réservoir (figure 1.5). Le débit d'entrée d_e est commandé par la vanne V de type tout ou rien.

Le débit de sortie d_s est inconnu, il dépend des utilisateurs. On supposera : $d_s < d_e$.

La commande se fait de la manière suivante :

- la vanne V est fermée lorsque la hauteur d'eau dans le réservoir atteint le niveau haut N_h, détecté par le capteur C_h.
- la vanne est ouverte lorsque le niveau atteint son seuil bas N_b, détecté par le capteur C_b.

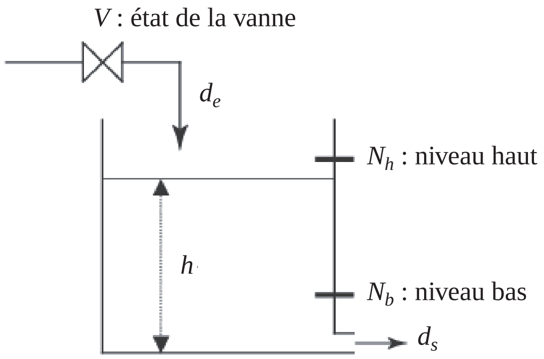

Figure 1.5 Commande de remplissage d'un réservoir.

Deux types d'équations décrivent le système :

1) Les équations de la partie continue (loi de conservation de la masse) :

$$S\frac{dh}{dt} = Vde - ds \tag{1.9}$$

où $V = 0$ si la vanne est fermée et $V = 1$ si la vanne est ouverte.

2) Les équations Booléennes de la partie discrète :

$$V^+ = C_b + \overline{C}_h V \tag{1.10}$$

avec

$$C_b = 1 \text{ si } h \leqslant N_b \quad C_h = 1 \text{ si } h \geqslant N_h \tag{1.11}$$

C'est l'ensemble des équations (1.9, 1.10) et des conditions de transition des variables C_b et C_h (1.11) qui définit le fonctionnement du système et permet de simuler son évolution.

$T = \mathbb{R}$

La sortie est h. Les entrées sont d_e entrée réelle de commande, d_s entrée réelle de perturbation. L'état contient des variables binaires : C_b et C_h, et une variable réelle : h.

Chapitre 2

Les modèles d'état

2.1 INTRODUCTION

La notion de systèmes dynamiques nous montre que la modélisation la plus riche est celle qui utilise la notion d'état puisqu'elle représente un ensemble de variables *a priori* plus grand que celui constitué par les entrées et les sorties. Nous commencerons donc par étudier les modèles qui l'utilisent et que l'on nomme classiquement : « modèles d'état » en opposition avec les modèles « entrées-sorties » qui peuvent paraître plus naturels puisqu'ils ne concernent que les variables « visibles » de l'extérieur. Nous verrons que s'il est toujours possible de trouver un modèle « entrées-sorties » à partir d'un modèle d'état, la réciproque n'est pas toujours vraie et nécessite des hypothèses supplémentaires.

Nous commencerons par les modèles linéaires, non pas parce que ce sont les plus simples, mais parce qu'ils permettent d'introduire de nombreuses notions indispensables à l'automatique et que bien souvent leur utilisation pour concevoir le contrôle est suffisante. On utilise très souvent un modèle obtenu par linéarisation d'un modèle non linéaire, autour d'un point d'équilibre ou autour d'une trajectoire (chapitre 4). C'est en tout cas, et à juste raison, la démarche normale de l'ingénieur avant de mettre en oeuvre les techniques non linéaires. Nous traiterons essentiellement les systèmes linéaires à paramètres constants. En effet, même si certaines propriétés restent vraies dans le cas où les paramètres varieraient en fonction du temps, les résultats pratiques sont peu nombreux. Quant aux systèmes dits « à paramètres variants », leurs méthodes d'étude relèvent clairement des méthodes non linéaires. Il reste à choisir entre les modèles à temps continu et les modèles à temps discret. Il y a des arguments en faveur des uns ou des autres.

- Si le temps est continu les systèmes à contrôler ne le sont pas forcément (cf. le compte d'épargne) et la vision que l'on en a actuellement avec les commandes numériques est clairement à temps discret.
- Bien qu'elles soient plus étudiées dans les cours de mathématiques, les équations différentielles ne sont pas plus simples que les équations de récurrence.

- Il est vrai que les performances, en particulier les réponses temporelles, sont plus simples à interpréter en temps continu.
- Les démonstrations sont plus simples en temps discret, car il suffit en général de compter les équations.

Il serait préférable de commencer par les modèles à temps discret, ne serait-ce que pour habituer tout de suite les lecteurs à travailler avec les équations de récurrence, car ce sont elles qui seront programmées *in fine* pour réaliser le contrôle. Cependant, pour garder le lien avec les équations différentielles qui sont bien connues des étudiants, tout en simplifiant les démonstrations, les deux études seront menées en parallèle.

2.2 LES MODÈLES LTI

Les systèmes dont le fonctionnement est décrit par des équations différentielles ou des équations de récurrence linéaires à coefficients constants sont appelés communément « systèmes LTI » pour systèmes Linéaires à Temps Invariant ou *Linear Time Invariant Systems*. Les notions structurelles fondamentales pour le contrôle seront introduites sur ces modèles : la stabilité, la commandabilité et l'observabilité. Lorsque ces propriétés ne sont pas vérifiées, la première préoccupation de l'automaticien est soit de les obtenir, soit d'évaluer avec quel niveau de dégradation un contrôle peut encore être fait.

2.2.1 Forme canonique

Pour de nombreux systèmes physiques, l'écriture des équations en utilisant des variables d'état est naturelle et couramment employée. Lorsqu'on écrit les équations qui représentent le fonctionnement d'un moteur à courant continu, on écrit l'équation électrique (L, R, i, U, k, ω sont respectivement l'inductance, la résistance et le courant d'induit, la tension d'alimentation, le coefficient de force contre-électromotrice et la vitesse de rotation du rotor)

$$L((di)/(dt)) = U - Ri - k\omega$$

et l'équation mécanique (J, f, Γ_c sont respectivement l'inertie des parties tournantes, le coefficient de frottement visqueux, le couple de charge)

$$J((d\omega)/(dt)) = ki - f\omega - \Gamma_c$$

le courant d'induit et la vitesse de rotation sont les deux variables d'état « naturelles » du moteur.

Nous écrivons les équations différentielles, comme les équations de récurrence, sous la forme de plusieurs équations du premier ordre couplées entre elles. Pour ces systèmes, l'espace d'état est $\mathbb{R}^n$, nous supposerons qu'il y a p sorties et m entrées. Les variables d'état, de sorties et d'entrées sont regroupées respectivement dans le vecteur d'état x, le vecteur de sorties y et le vecteur d'entrées u. Les relations sont linéaires et peuvent donc s'écrire sous forme matricielle.

Définition 2.1 (Forme canonique LTI) $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^m$

***Cas continu* :** *L'équation d'état d'un système LTI sous forme canonique s'écrit (2.1a) et (2.1b) :*

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.1a}$$
$$y = Cx + Du \tag{2.1b}$$

***Cas discret* :** *Dans le cas discret on utilisera les mêmes notations : matrices A, B, C, D . La forme canonique est (2.2a) et (2.2b) :*

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \tag{2.2a}$$
$$y_k = Cx_k + Du_k \tag{2.2b}$$

On rencontrera ces équations chaque fois que le système est commandé par un ordinateur : x_k, y_k, u_k sont les valeurs du vecteur d'état, des sorties et des commandes au $k^{ième}$ instant d'échantillonnage.

Dans les deux cas, continu et discret, on parlera du système (A, B, C, D) avec $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^m$et où :

$A\,[n \times n]$ est la *matrice d'état*

$B\,[n \times m]$ est la *matrice d'entrée*

$C\,[p \times n]$ est la *matrice de sortie*

$D\,[p \times m]$ est le *transfert direct entrée/sortie*.

Les équations (2.1) et (2.2) sont représentées par les schémas de la figure 2.1

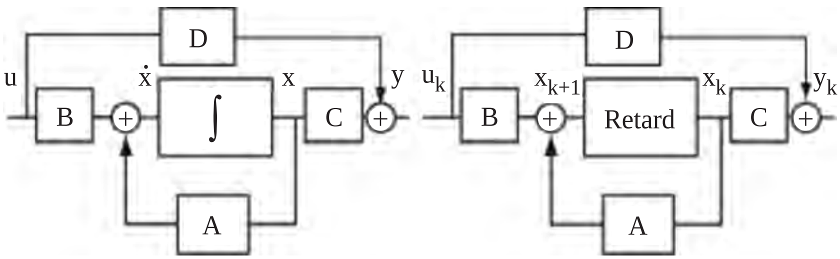

Figure 2.1 Schéma standard pour la forme canonique.

2.2.2 Représentations équivalentes

À partir de la représentation d'état précédente (A, B, C, D) il est possible d'obtenir d'autres formes d'état en effectuant une transformation sur x. Soit P une matrice régulière (P de rang n). On construit un nouveau vecteur d'état z par la transformation

$$z = Px \tag{2.3}$$

Le vecteur z vérifie l'équation (2.4a) et les sorties y peuvent s'écrire en fonction de z et de u par l'équation (2.4b).

$$\dot{z} = A_1 z + B_1 u \tag{2.4a}$$
$$y = C_1 z + D_1 u \tag{2.4b}$$

Les matrices (A_1, B_1, C_1, D_1) vérifient les relations (2.5). Il suffit de remplacer x par $P^{-1}z$ dans (2.1a et 2.1b) pour le démontrer

$$A_1 = PAP^{-1} \tag{2.5a}$$

$$B_1 = PB \tag{2.5b}$$

$$C_1 = CP^{-1} \tag{2.5c}$$

$$D_1 = D \tag{2.5d}$$

Définition 2.2 (représentations équivalentes) *Deux représentations (A, B, C, D) et (A_1, B_1, C_1, D_1) sont dites* équivalentes, *s'il existe une matrice P inversible telle que les équations (2.5) soient vérifiées.*

On peut comprendre aisément que les deux ensembles (A, B, C, D) et (A_1, B_1, C_1, D_1) représentent bien le même système. En effet la transformation (2.3) peut être interprétée comme un changement de base dans l'espace d'état et les matrices A, B et C sont respectivement transformées :

- comme la matrice représentant un endomorphisme de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par le changement de base P^{-1}.
- comme la matrice représentant un endomorphisme de $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ avec un changement de base dans l'espace de $\mathbb{R}^n$.
- comme la matrice représentant un endomorphisme de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ avec un changement de base dans l'espace de $\mathbb{R}^n$.

On pourra donc considérer ces matrices comme les matrices représentant ces trois endomorphismes. Ces endomorphismes sont les éléments invariants du système, indépendants des bases choisies dans les différents espaces vectoriels. Cette remarque sera utile pour les formes canoniques et pour étudier les réalisations minimales.

2.2.3 La fonction de transition d'état

Pour les systèmes LTI, on sait calculer explicitement la fonction de transition d'état. On l'obtient en intégrant l'équation différentielle ou l'équation de récurrence.

a) Cas continu

La solution générale de l'équation

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.6}$$

est donnée par la théorie des équations différentielles :

$$x(t) = \exp.(A(t - to))x(to) + \int_{to}^{t} \exp.(A(t - s))Bu(s)ds \tag{2.7}$$

Définition 2.3 (matrice de transition) *L'opérateur* $\exp(At)$ *est souvent appelé matrice de transition du système linéaire.*

Rappelons que

$$\exp(At) = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + ... + \frac{A^nt^n}{n!} + ... \tag{2.8}$$

Pour calculer $\exp(At)$ explicitement on diagonalise A. Soit $\Lambda = P^{-1}AP$ où P est la matrice des vecteurs propres, alors :

$$\exp(At) = Pexp(\Lambda t)P^{-1} \tag{2.9}$$

et $\exp(\Lambda t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$ où les λ_i sont les valeurs propres de A.

Cette méthode n'est possible que lorsque A est diagonalisable (voir chapitre 19, Calcul de $exp(At)$).

b) Cas discret

La solution de l'équation

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \tag{2.10}$$

est immédiate

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=1}^{i=k} A^{i-1}Bu_{k-i} \tag{2.11}$$

Les quantités exp $.(A(t-to))x(to)$ et $A^k x_0$ s'appellent les régimes libres. C'est l'évolution du système sur ses conditions initiales.

Les quantités $\int_{to}^{t} \exp .(A(t-s))Bu(s)ds$ et $\sum_{i=1}^{i=k} A^{i-1}Bu_{k-i}$ sont les régimes forcés par les entrées.

c) Passage continu–discret

Lorsqu'un système continu (2.6) est commandé au moyen d'un ordinateur, l'algorithme de commande est activé périodiquement avec une période T : et la commande u est maintenue constante entre deux rafraîchissements ; on a donc

$$u(t) = u(kT) = u_k \;\; t \in [kT, (k+1)T[\tag{2.12}$$

il suffit d'utiliser la solution de l'équation différentielle (2.7) avec $t_0 = kT$ et $t = (k+1)T$ pour obtenir le résultat :

$$\begin{aligned} x((k+1)T) &= \exp(A((k+1)T - kT))x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \exp(A((k+1)T - s))Bu_k ds \\ &= \exp(AT)x(kT) + (\int_0^T \exp\left[A(T-s)\right] Bds)u_k \end{aligned}$$

ou

$$x_{k+1} = \exp(AT)x_k + \int_0^T \exp\left[A(T-s)\right] Bu_k ds = \mathcal{A}x_k + \mathcal{B}u_k \tag{2.13}$$

2.2.4 La stabilité

Définition 2.4 (point d'équilibre) *Soit le système $\dot{x} = f(x)$, on dit que x_e est un point d'équilibre si $f(x_e) = 0$. Soit le système $x_{k+1} = f(x_k)$, on dit que x_e est un point d'équilibre si $x_e = f(x_e)$.*

Il est évident qu'au point d'équilibre, comme la dérivée est nulle, le système ne bouge pas. Une trajectoire ayant comme origine un point d'équilibre est réduite à ce point.

On sait parfaitement que cette propriété peut être physiquement complètement illusoire : une pyramide en équilibre sur la pointe a peu de chances d'y rester longtemps. La vraie question est de savoir si :

- le système a tendance à rester à proximité du point d'équilibre.
- à se diriger vers lui.
- à s'en éloigner.

Ces notions s'appellent respectivement :

- stabilité ;
- stabilité asymptotique (globale si la condition initiale n'importe pas) ;
- instabilité.

Elles sont illustrées par les schémas de la figure 2.2

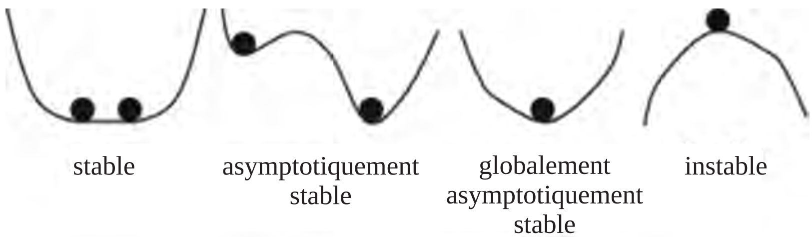

Figure 2.2 Différents types d'équilibre.

En l'absence d'entrée, l'état d'équilibre pour les systèmes LTI continu et discret est l'état nul ($x = 0$).

Exemple 2.1 (mélangeur)

On a l'équilibre lorsque $\dfrac{dH}{dt} = \dfrac{dC}{dt} = 0$ D'où les deux équations 1.1 et 1.2 : $D_{10} + D_{20} - D_0 = 0$ et $C_1 D_{10} + C_2 D_{20} - C_0 D_0 = 0$ avec *V1 :* $D_0 = k\sqrt{H_0}$ ou *V2 :* $D_0 =$ donnée constante.

Dans la suite nous utiliserons les valeurs numériques suivantes pour développer les calculs : $S = 1, C_1 = 50, C_2 = 10, H_0 = 1, C_0 = 30, k = 0,001$.

Le point d'équilibre est obtenu :
V1 : en résolvant les équations précédentes $D_0 = 0,01$ $D_{10} = D_{20} = 0,005$.
V2 : en donnant la valeur de la constante D_0. Nous choisirons la valeur trouvée pour l'équilibre dans le mode 1 soit $D_0 = 0,01$.
On trouve alors le même point d'équilibre : $D_{10} = D_{20} = 0,005$

Stabilité et énergie sont liées. L'état d'équilibre d'un système, correspond à un état où son énergie est minimale. Par exemple pour un système mécanique, l'équilibre est atteint quand les énergies cinétique et potentielle sont minimales : c'est à dire : à l'arrêt et au point le plus bas.

Nous étudierons les modèles obtenus par linéarisation autour du point d'équilibre.

On écrit alors les écarts entre les variables et leur position d'équilibre : $X = X_0 + x$ pour obtenir le modèle linéarisé autour du point de fonctionnement.

➤ **V1**

$$S\frac{dh}{dt} = d_1 + d_2 - d$$
$$S\left(H_0\frac{dc}{dt} + C_0\frac{dh}{dt}\right) = C_1 d_1 + C_2 d_2 - C_0 d - D_0 c$$

En réécrivant ces équations sous la forme canonique :

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{D_0}{2V_0}h + \frac{d_1 + d_2}{S}$$
$$\frac{dc}{dt} = -\frac{D_0}{V_0}c + \frac{C_1 - C_0}{V_0}d_1 + \frac{C_2 - C_0}{V_0}d_2$$

En posant $\tau = \dfrac{V_0}{D_0}$ on a le système :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} h \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2\tau} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\tau} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{S} & \dfrac{1}{S} \\ \dfrac{C_1 - C_0}{V_0} & \dfrac{C_2 - C_0}{V_0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

➤ **V2**

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d_1 + d_2 - d}{S} \tag{2.15}$$
$$\frac{dc}{dt} = -\frac{D_0}{V_0}c + \frac{C_1 - C_0}{V_0}d_1 + \frac{C_2 - C_0}{V_0}d_2 \tag{2.16}$$

Sous la forme matricielle on obtient :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} h \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\tau} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{S} & \dfrac{1}{S} \\ \dfrac{C_1 - C_0}{V_0} & \dfrac{C_2 - C_0}{V_0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{S} \\ 0 \end{bmatrix} d \tag{2.17}$$

Application numérique

$\tau = 100s$

$C_1 - C_0 = 20$

$C_2 - C_0 = -20$

➤ **V1**

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} h \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.005 & 0 \\ 0 & -0.01 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 20 & -20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

➤**V2**

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} h \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.01 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 20 & -20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d \tag{2.19}$$

Définition 2.5 (système LTI stable) *On dira qu'un système LTI est (asymptotiquement) stable si l'état $x = 0$ est (asymptotiquement) stable.*

Comme on dispose de la solution explicite :

$$x(t) = \exp(At)x_0 \tag{2.20a}$$

$$x_k = A^k x_0 \tag{2.20b}$$

les résultats sont immédiats.

Proposition 2.6 (stabilité) *Un système LTI continu est stable si les valeurs propres de la matrice d'état sont à parties réelles négatives. Un système LTI discret est stable si les valeurs propres de la matrice d'état ont un module inférieur ou égal à un.*

Proposition 2.7 (stabilité asymptotique) *Un système LTI continu est asymptotiquement stable si les valeurs propres de la matrice d'état sont à parties réelles strictement négatives. Un système LTI discret est asymptotiquement stable si les valeurs propres de la matrice d'état ont un module strictement inférieur à un.*

Proposition 2.8 *Un système LTI asymptotiquement stable est globalement asymptotiquement stable.*

> *Démonstration.* Ces résultats découlent directement des équations (2.20)

Exemple 2.2

V1 L'équilibre est asymptotiquement stable puisque les valeurs propres de la matrice d'état ($-\frac{1}{2\tau}$ et $-\frac{1}{\tau}$) (2.14) sont des nombres négatifs.

V2 L'équilibre est seulement stable puisqu'une valeur propre vaut zéro (2.17). L'explication physique est simple. Dans cette modélisation le débit de fuite est considéré comme une perturbation, donc indépendant de la hauteur de liquide dans la cuve. Si le débit d'entrée est égal à ce débit de fuite, toute hauteur est un point d'équilibre.

Remarque : Il est important de remarquer que **les matrices d'état sont différentes.**

Il est toujours hasardeux de modéliser un comportement inconnu (ici par exemple, on peut imaginer qu'on ignore la loi qui lie le débit à la hauteur) par une perturbation indépendante. La dynamique interne du système, reflétée par la matrice d'état, est modifiée puisque le débit de fuite n'est plus lié à la hauteur.

La matrice C dépendra des capteurs utilisés.

2.2.5 La commandabilité

Cette propriété donne la réponse au problème suivant : étant donnés un état initial x_0 imposé et un état final x_f désiré, existe-t-il au moins une commande qui amène le système d'un état vers l'autre ? Par exemple, est-il possible d'amener un avion parallèlement à l'axe de la piste d'atterrissage alors qu'il vole à une altitude de 3000 m, avec une vitesse de 600 km/h ?

On comprend l'intérêt de pouvoir répondre à cette question avant de lancer une étude pour rechercher la meilleure commande. Mais il y a plus : si un système possède cette propriété, on est assuré de pouvoir au moins le stabiliser avec une structure de commande simple. *A contrario,* si la commandabilité n'est pas vérifiée sur le système à commander, on peut même être incapable d'arriver à stabiliser le système ; et ceci quelle que soit l'habileté de l'automaticien ! C'est la structure du système qui est à modifier avant de pouvoir entreprendre son contrôle.

Remarquons que cette propriété est très exigeante : avec les entrées, il ne s'agit pas uniquement de faire évoluer les sorties, mais d'amener toutes les composantes du vecteur d'état **à des valeurs prédéfinies**. Est-il évident, par exemple (figure 2.3), que l'on puisse imposer une valeur arbitraire du courant i et de la tension V_s dans le circuit électrique lorsqu'on dispose de la seule source de tension V_e comme commande ?

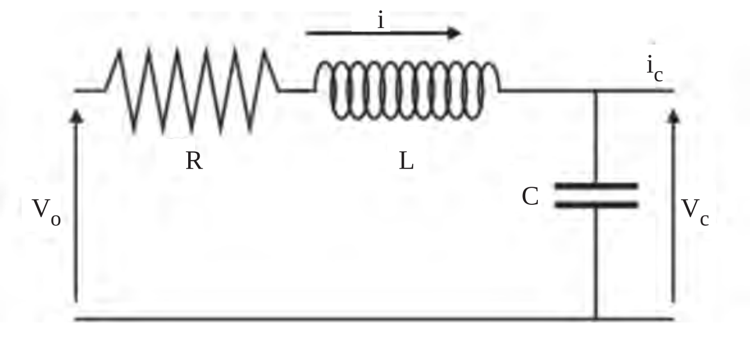

Figure 2.3 Circuit passif (R, L, C).

Il n'est pas facile de répondre à cette question de manière intuitive. Heureusement, la vérification de cette propriété est immédiate dans le cas mono-entrée, elle ne présente de difficulté que dans le cas multivariable.

Pour désigner indifféremment les systèmes continus (2.6) et discrets (2.10), on utilisera l'appellation « *système* (A, B) ».