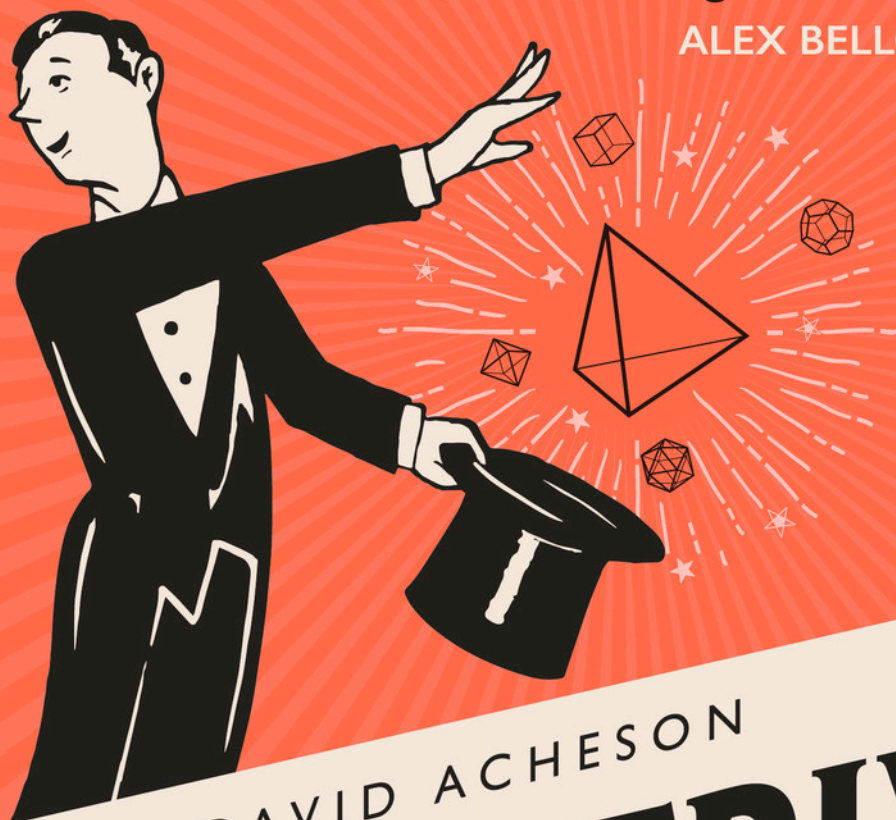


« Le livre qui vous fera tomber
fou amoureux de la géométrie! »

ALEX BELLOS



DAVID ACHESON

GEOMETRIX

D'Euclide à Einstein, la magie
d'une science surprenante

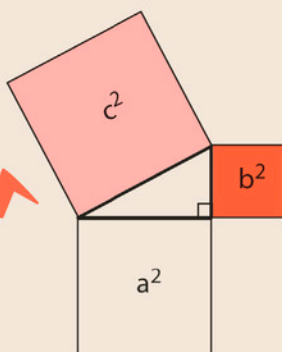


Flammarion

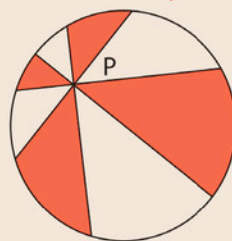
La géométrie vous est toujours apparue comme particulièrement obscure et Thalès comme un génie du mal? Il est grand temps d'ouvrir les yeux!

EMBARQUEZ POUR UN VOYAGE MOUVEMENTÉ À TRAVERS L'HISTOIRE DE LA GÉOMÉTRIE, D'EUCLIDE À EINSTEIN, POUR :

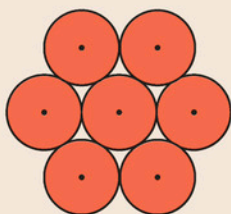
PROUVER LE THÉORÈME DE PYTHAGORE AVEC DES CISEAUX



FAIRE (ENFIN) DES PARTS ÉQUITABLES GRÂCE AU THÉORÈME DE LA PIZZA



CALCULER LA VALEUR DE π AVEC DES ORANGES



David Acheson est professeur émérite au Jesus College à Oxford (Royaume-Uni). Dans son premier livre à succès, *Mathémagique*, il a révélé ses deux grandes passions: la guitare électrique et les mathématiques.

Flammarion

GEOMETRIX



DAVID ACHESON



GEOMETRIX



*Traduction de l'anglais (Royaume-Uni)
par Olivier Courcelle*



Flammarion

© David Acheson 2020.

Géométrie a été initialement publié en anglais en 2020
sous le titre *The Wonder Book of Geometry*.

La présente traduction est publiée en accord avec Oxford University Press.
Flammarion est l'unique responsable de cette traduction,
et Oxford University Press ne peut être mis en cause en cas d'erreurs,
omissions, inexactitudes ou ambiguïtés dans celle-ci,
ou pour tout dommage lié à leur accord.

The Wonder Book of Geometry was originally published in English in 2020.
This translation is published by arrangement with Oxford University Press.
Flammarion is solely responsible for this translation from the original work
and Oxford University Press shall have no liability for any errors,
omissions or inaccuracies or ambiguities in such translation
or for any losses caused by reliance thereon.

© Flammarion, 2021, pour la traduction française.
ISBN : 978-2-0802-4949-4

INTRODUCTION

Tout a commencé à l'école, par un froid matin de 1956, alors que j'avais 10 ans. Après avoir terminé un calcul au tableau noir, Mr. Harding se retourna dans un nuage de craie et, sans plus de transition, nous demanda de tracer un demi-cercle de diamètre AB. Puis de choisir un point P sur ce demi-cercle et de le joindre par des segments de droite aux points A et B. Enfin, de mesurer l'angle en P (Fig. 1).

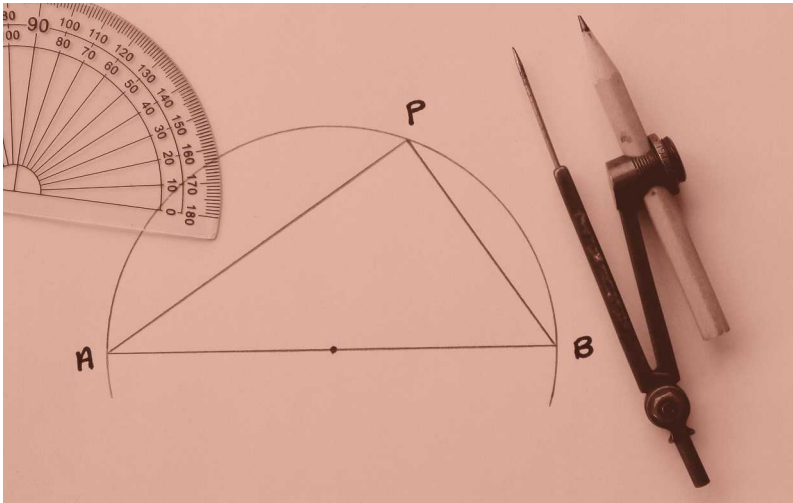
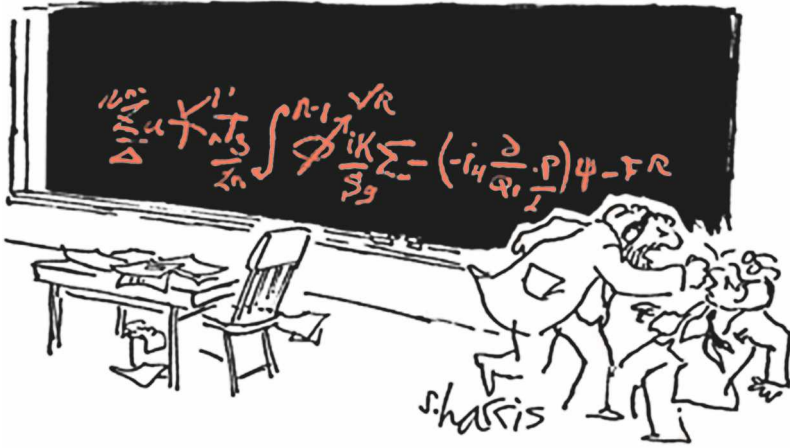


Fig. 1. Théorème de l'angle droit.



"YOU WANT PROOF? I'LL GIVE YOU PROOF!"

Fig. 2. De l'importance de la preuve : « Ah, tu veux des preuves, eh bien je vais t'en donner moi ! ».

Je suivis scrupuleusement ces instructions, me disant que l'angle en question devait dépendre de la position du point P sur le demi-cercle.

Eh bien pas du tout !

Aussi fou que cela paraisse, l'angle valait *toujours* 90° .

À cette époque, j'ignorais que les mathématiques pouvaient provoquer maints émerveillements de ce genre.

J'ignorais tout autant que nous devons ce théorème – l'un des premiers et des plus importants de la géométrie – à un mathématicien de l'Antiquité grecque nommé Thalès. Le même homme, du moins le dit-on, pour qui le vrai problème n'est pas tant « ce que nous savons » que « *comment nous le savons* ».

INTRODUCTION

Comment, donc, savons-nous que l'angle sur un demi-cercle est toujours égal à 90° ?

En bref, je dirais que nous pouvons le *prouver*, par une série d'étapes logiques élémentaires, à partir d'hypothèses tenues pour évidentes.

Et c'est ce que je me propose de faire, dans les quelques pages qui suivent, avec toutefois en tête un objectif plus ambitieux que de simplement présenter quelques principes géométriques fondamentaux.

Car la géométrie permet de percevoir l'esprit et la vraie nature des mathématiques, à n'importe quel âge, et ce *en moins d'une demi-heure*.

Tournez la page, si vous ne me croyez pas !

POUR SE METTRE EN JAMBES

Le premier concept important est celui de *droites parallèles*.

Ce sont des droites, tracées sur un même plan, qui ne se croisent jamais – aussi loin que vous les suiviez, elles ne se rencontrent pas.

Je vais faire deux hypothèses à leur sujet.

Droites parallèles

Imaginons que deux droites parallèles en coupent une troisième. Apparaissent ainsi des angles dits *correspondants*, représentés sur la Fig. 3.

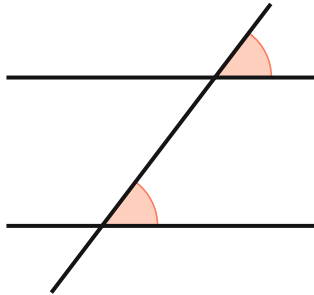


Fig. 3 Des angles correspondants.

POUR SE METTRE EN JAMBES

Dans la suite, sauf mention du contraire, je supposerai que :

(1) si deux droites sont parallèles, alors les angles correspondants sont égaux ;

(2) si deux angles correspondants sont égaux, alors les deux droites sont parallèles.

Ces hypothèses se fondent sur la notion intuitive que des droites parallèles vont, en quelque sorte, « dans la même direction ». Cela étant posé, et pour aussi évidentes que puissent paraître les propriétés (1) et (2), il nous faut garder à l'esprit que ce ne sont que des *hypothèses*.

Notez également la grande différence de leur champ d'action : (1) s'utilise quand deux droites parallèles sont données, tandis que (2) sert à montrer que deux droites sont effectivement parallèles.

Angles

Nous mesurerons tous les angles en *degrés*, une unité abrégée par le symbole $^{\circ}$. Un point P sur une droite forme un angle de 180° (Fig. 4).

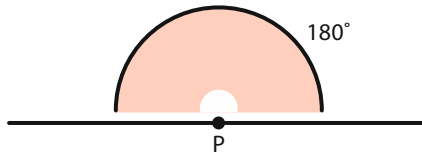


Fig. 4. Un angle de 180° .

La moitié d'un tel angle, c'est-à-dire un angle de 90° , est appelé *angle droit*. Les deux droites qui le définissent sont dites *perpendiculaires* (Fig. 5).

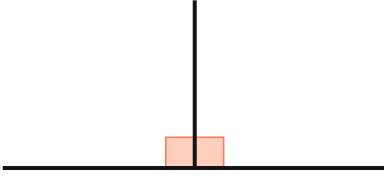


Fig. 5. Des angles droits.

Angles opposés

Quand deux droites se rencontrent, les angles dits *opposés* sont égaux (Fig. 6).

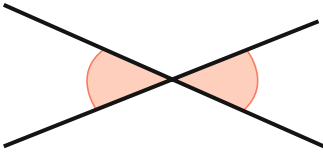


Fig. 6. Des angles opposés.

Angles alternes

Si deux droites parallèles coupent une troisième droite, alors les angles dits *alternes* (ou *alternes-internes*) sont égaux (Fig. 7).

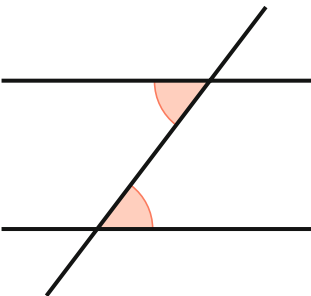


Fig. 7. Des angles alternes.

POUR SE METTRE EN JAMBES

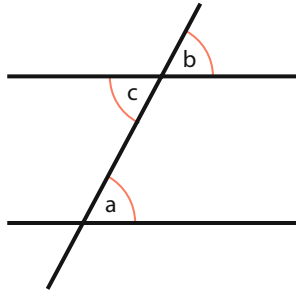


Fig. 8. Une preuve de l'égalité des angles alternes.

Avec les notations de la Fig. 8, ce résultat se montre en remarquant que $a = b$ (angles correspondants) et que $b = c$ (angles opposés), de sorte que $a = c$.

L'argument fonctionne d'ailleurs « en sens inverse », c'est-à-dire que si deux angles alternes sont égaux, alors les droites correspondantes sont parallèles.

Ces éléments fondamentaux désormais en place, nous sommes prêts à démontrer un premier théorème qui, de mon point de vue, est loin d'être évident...

La somme des angles d'un triangle

La somme des trois angles d'un triangle est toujours égale à 180° (Fig. 9).

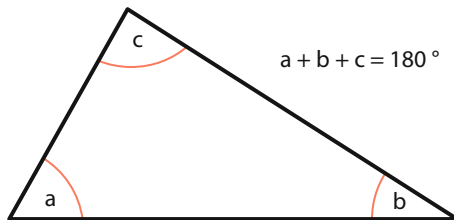


Fig. 9. La somme des angles d'un triangle.

GÉOMÉTRIX

Pour démontrer ce résultat, traçons une droite passant par un sommet du triangle et parallèle au côté opposé (Fig. 10).

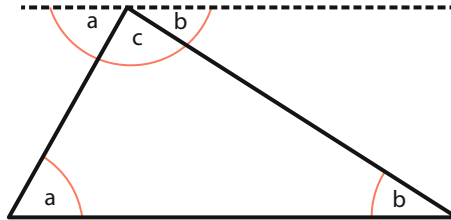


Fig. 10. Une preuve du théorème de la somme des angles d'un triangle.

Les angles a sont égaux car ils sont alternes.

Les angles b sont égaux... pour la même raison !

Comme la dernière droite définit un angle de 180° , nous avons bien la relation annoncée : joli, non ?!

$$a + b + c = 180^\circ.$$

LES *ÉLÉMENTS* D'EUCLIDE

Cette façon concise et logiquement ordonnée de présenter une preuve, c'est justement celle qui caractérise le plus célèbre des livres de géométrie : les *Éléments*. Il fut rédigé par Euclide d'Alexandrie (Fig. 11) vers 300 av. J.-C.



Fig. 11. Euclide.

Je pense qu'il vaut mieux préciser dès maintenant que les théorèmes et les démonstrations présentés dans les *Éléments* (Fig. 12) concernent essentiellement des objets imaginaires.



Fig. 12. Le plus ancien exemplaire conservé des Éléments d'Euclide, le manuscrit « Ms D'Orville 301 », copié pour Aréthas de Patras, à Constantinople en 888 av. J. C.

Je m'explique : une droite euclidienne, par exemple, n'est pas seulement « parfaitement droite » : elle n'a pas d'épaisseur. À supposer que je puisse la tracer, vous ne pourriez donc pas la voir. De même, un point n'est pas une tache de petite dimension. Il n'a pas de dimension du tout. Ou pour le formuler à la manière d'Euclide :

« Le point est ce dont la partie est nulle. »

Il faut encore ajouter qu'Euclide ne fait aucun usage de ce que nous appelons les « unités de mesure ». Pas de degrés

LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE

chez lui, donc. Ce qui se rapproche le plus de cette notion est le concept d'*angle droit*, qu'il utilise beaucoup.

THEOR. 8. PROP. XV.

Si deux lignes droictes se coupent l'une l'autre, elles feront les angles oppozez au sommet egaux.

Soient les deux lignes AB & CD, se coupans l'une l'autre au point E: Je dis que les angles oppozez au sommet, sçavoir AEC, & DEB, sont egaux entr'eux.

Car d'autant que sur AB tombe la ligne CE, les angles AEC, & BEC, sont egaux à deux droicts par la 13. prop. Item, pour la mesme raison, CEB, & DEB, seront egaux à deux droicts: parrant les deux angles AEC & CEB, sont egaux aux deux CEB & DEB. Que si on oste le commun CEB, le demeurant AEC sera egal au demeurant DEB. Le mesme se peut aussi dire des deux angles oppozez AED, & CEB. Parquoy si deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonstrez.

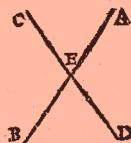
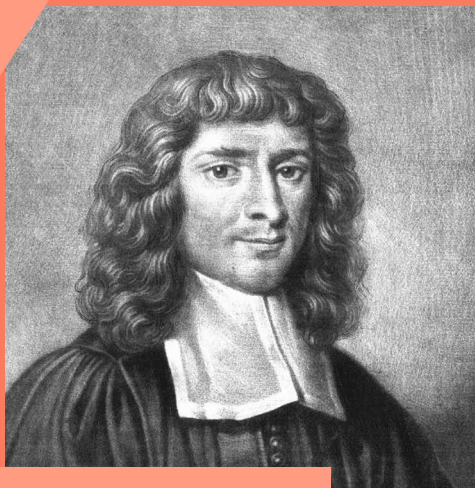


Fig. 13. La proposition qui assure que deux angles opposés sont égaux, extraite de l'édition française par Henrion des Éléments d'Euclide (1632).

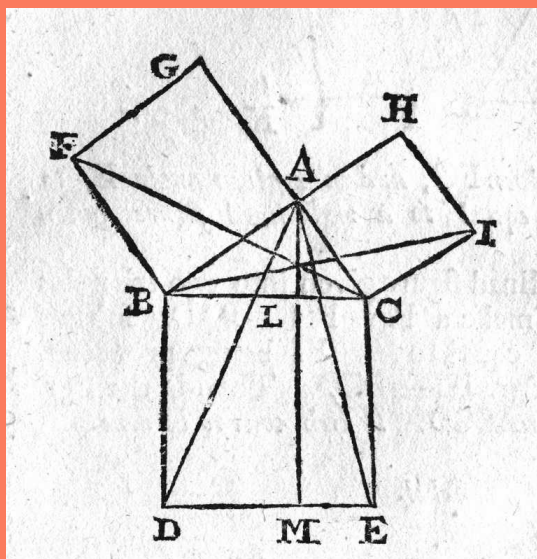
Malgré cela, et en dépit de leur style d'exposition franchement austère, les *Éléments* ont exercé plus d'influence et connu plus d'éditions que la quasi-totalité des autres livres de l'histoire de l'humanité !

Je m'empresse toutefois d'ajouter qu'il n'existe pas « UNE meilleure » façon de faire de la géométrie. À chacun de trouver son propre chemin ! Et si, en faisant souvent référence à Euclide dans ce livre, je donnais souvent l'impression du contraire, ce serait avant tout parce que je souhaite vous conduire au plus vite à des résultats fascinants...

EUCLIDE, 1732



Publiée pour la première fois en 1660, l'édition des *Éléments* par Isaac Barrow compte parmi les plus populaires des éditions anciennes d'Euclide. Mon exemplaire date quant à lui de 1732.



C. Bugh

EUCLID E's ELEMENTS;

The whole FIFTEEN BOOKS
compendiously Demonstrated:

WITH
ARCHIMEDES's Theorems of
the Sphere and Cylinder Investigated
by the *Method of Indivisibles*.

By ISAAC BARROW, D.D. late *Master*
of Trinity College in Cambridge.

To which is Annex'd,
EUCLIDE's *Data*, and a brief
Treatise of Regular Solids.

The Whole revis'd with great Care,
and some Hundreds of Errors of the
former Impression corrected.

By THOMAS HASELDEN, *Teacher*
of the *Mathematicks*.

Καθαροὶ ψυχῆς λογικῆς εἰσιν αἱ μαθηματικαὶ ἐπιστήμη.

LONDON: Printed for Daniel Midwinter and Aaron
Ward in Little-Britain; Arthur Bettesworth and Charles
Hitch in Pater-noster-row; and Thomas Page and William
Mount on Tower-Hill. 1732.



4

LE THÉORÈME DE L'ANGLE DROIT

Revenons à l'introduction de ce livre : le théorème de l'angle droit affirme donc que l'angle formé par un point sur un demi-cercle vaut toujours 90° . Comment le démontrer ? Vous allez voir qu'il nous faut encore quelques notions importantes...

Triangles congruents

Des triangles sont dits congruents s'ils ont exactement la même forme et la même taille.

La façon la plus évidente de caractériser la forme et la taille exactes d'un triangle, c'est probablement de spécifier la longueur de deux côtés, ainsi que l'angle qu'ils forment.

Cette description conduit à un test de congruence très simple, informellement baptisé « Côté-Angle-Côté », ou CAC (Fig. 14).

LE THÉORÈME DE L'ANGLE DROIT

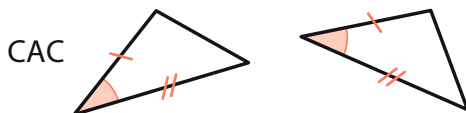


Fig. 14. Congruence par CAC.

Triangles isocèles

Un triangle est dit *isocèle* si deux de ses côtés sont égaux.

Les triangles de ce type jouent un rôle important en géométrie, principalement en raison du « théorème du triangle isocèle » que voici : « Les “angles à la base” d’un triangle isocèle sont égaux » (Fig. 15).

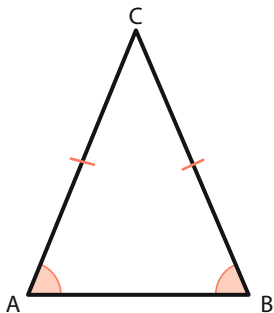


Fig. 15. Un triangle isocèle.

Bon, à mon avis, beaucoup d’entre vous trouveront ce résultat à peu près évident. Après tout, si nous lui faisons faire un demi-tour dans l’espace de façon à ce que le recto prenne la place du verso et vice versa, le triangle conservera exactement la même forme.

Une manière plus rigoureuse de prouver ce résultat consiste à introduire la *bissectrice*, la droite CD qui coupe l’angle en C en deux parties égales (Fig. 16).

GÉOMÉTRIX

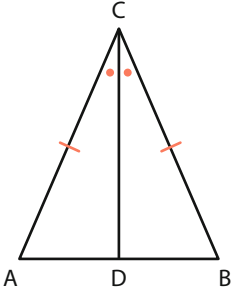


Fig. 16. Une preuve de l'égalité des angles à la base d'un triangle isocèle.

Les triangles ACD et BCD sont congruents par CAC, comme vu précédemment. L'un est en fait « l'image miroir » ou la version « retournée » de l'autre. En particulier, donc, les angles de sommet A et de sommet B doivent être égaux.

(S'il se trouve que les *trois* côtés d'un triangle sont égaux, le triangle est dit *équilatéral*. Le triangle est alors isocèle de trois façons différentes, si bien que tous ses angles sont égaux.)

Cercles

Un cercle est défini par cette propriété : tous ses points sont situés à la même distance d'un point particulier, souvent noté O , appelé *centre*.

J'introduis sur la Fig. 17 quelques éléments courants de terminologie.

Et voilà : nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème de l'angle droit !

LE THÉORÈME DE L'ANGLE DROIT

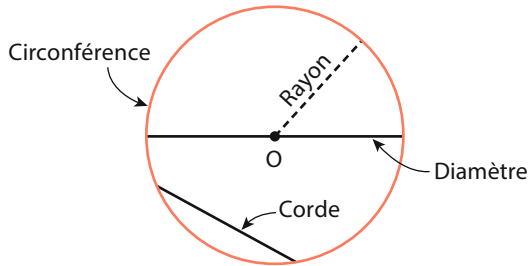


Fig. 17. Un cercle.

Théorème de l'angle droit

Nous cherchons donc à montrer que, pour tout point P sur le demi-cercle de la Fig. 18, l'angle $\widehat{APB} = 90^\circ$, où \widehat{APB} désigne l'angle formé par AP et PB .

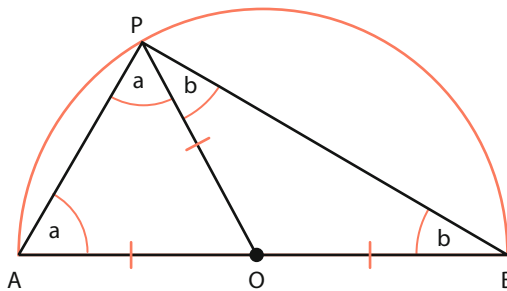


Fig. 18. Une preuve du théorème de l'angle droit.

Quel est le moyen le plus simple d'exprimer le fait que P est sur le demi-cercle ? Eh bien c'est sans doute de tracer la droite OP , puis de remarquer que $OP = OA = OB$. En effet, tous les points du cercle sont à la même distance du centre.

GÉOMÉTRIX

Sous vos yeux ébahis sont maintenant apparus deux triangles isocèles, AOP et BOP.

Les deux angles à la base a sont donc égaux, de même que les deux angles à la base b , d'accord ?

Comme la somme des trois angles sur le grand triangle APB doit faire 180° , nous avons :

$$a + (a + b) + b = 180^\circ,$$

soit $a + b = 90^\circ$, soit encore $\widehat{APB} = 90^\circ$, ce qui prouve le théorème.

Je n'ai jamais oublié cette preuve, depuis la première fois que je l'ai rencontrée, il y a de longues années, par ce froid matin d'hiver 1956...

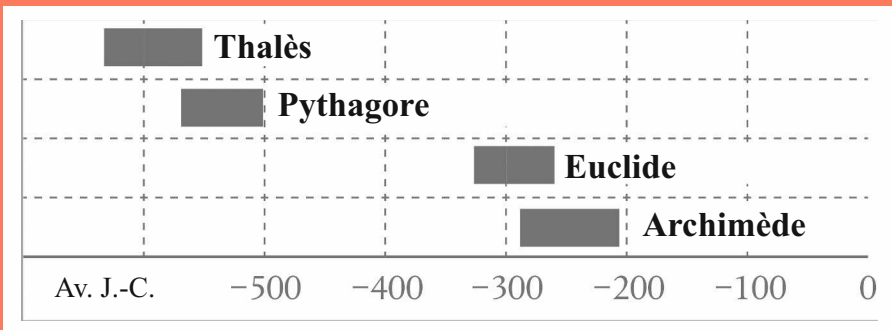
Il est vrai que ce résultat semble, à première vue, assez difficile à croire. Pourtant, quelques minutes plus tard, on se retrouve à penser, non sans raison, qu'il est à peu près évident – *pourvu qu'on le regarde de la bonne manière*.

Et croyez-en ma vieille expérience, cette illumination *a posteriori* caractérise souvent les plus belles des mathématiques !

LE MONDE MATHÉMATIQUE DE LA GRÈCE ANTIQUE



Thalès a vécu à Milet.
Originaire de l'île de Samos, Pythagore
s'est ensuite établi à Crotona.



L'Académie de Platon, à Athènes,
portait à l'entrée cette célèbre devise :

ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ
ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ

« Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre. »

Le phare d'Alexandrie.



Euclide a rédigé ses *Éléments* à Alexandrie.
Archimède a vécu et travaillé à Syracuse.

LA GÉOMÉTRIE PRATIQUE

L'histoire montre que la géométrie a souvent été appliquée à des problèmes très concrets. C'est ainsi que Thalès, par exemple, l'a employée pour calculer la hauteur de la Grande pyramide dans l'Égypte antique...

Thalès et les triangles semblables

Thalès a mesuré l'ombre de la Grande pyramide produite par le soleil, puis, en ajoutant sa demi-base, a déterminé la distance L de la Fig. 19.

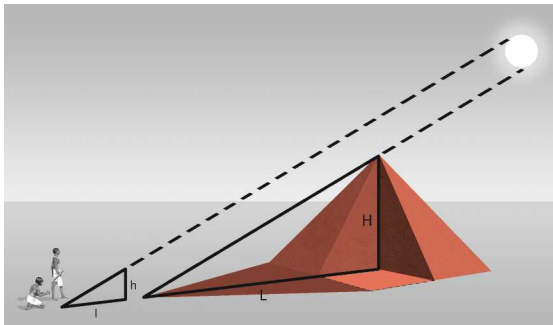


Fig. 19. Des triangles semblables.

GÉOMÉTRIX

Il a ensuite mesuré l'ombre l projetée par un poteau vertical de hauteur h . Supposant les rayons du soleil parallèles, il en a déduit que les deux triangles de la Fig. 19 étaient exactement de même *forme*, quoique de tailles différentes, et que les côtés correspondants respectaient tous une même proportion. Qu'en particulier, donc :

$$\frac{h}{H} = \frac{l}{L}.$$

Ainsi, fort de la mesure des trois longueurs L , l et h , il a pu déterminer la hauteur H de la Grande pyramide : le tour était joué !



Fig. 20. Thalès, représenté sur un timbre grec de 1994.

De nos jours, on utilise le terme *semblable* pour désigner des triangles qui ont exactement la même forme, mais pas nécessairement la même taille. Nous verrons un peu plus tard qu'ils jouent un rôle majeur dans certains des théorèmes de géométrie les plus remarquables.

Comment mesurer la Terre ?

Selon ses racines grecques, le mot « géométrie » signifie presque littéralement « mesure de la Terre ». Par conséquent, il ne me paraît pas inopportun de jeter un œil sur la mesure de la circonférence de la Terre, effectuée par Ératosthène vers 240 av. J.-C !

Il se trouve qu'il s'est servi lui aussi des rayons du soleil, quoique d'une manière assez différente. Ératosthène savait qu'à midi, le plus long jour de l'année, le soleil se situait pile au-dessus de Syène, aujourd'hui Assouan, sa ville de naissance, car il éclairait le fond d'un puits très profond.

Il savait aussi qu'à la même heure, le soleil faisait un angle de $7,2^\circ$ avec la verticale à Alexandrie, situé à 5 000 *stades* plein nord de Syène.

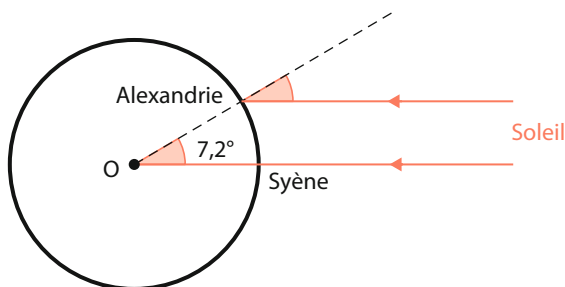


Fig. 21. La mesure de la Terre.

Comme Thalès, Ératosthène considéra qu'en raison de l'éloignement de notre étoile, ses rayons arrivaient parallèles sur Terre. Les deux angles colorés sur la Fig. 21 sont dès lors des angles correspondants, de sorte que l'angle en O, le centre de la Terre, doit lui aussi valoir $7,2^\circ$.