Automatique

Automatique

Systèmes linaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état

Yves Granjon

4e ÉDITION

DUNOD

Illustration de couverture : © Phonlamai Photo/shutterstock.com

21 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-082847-0

Table des matières

DEUXIÈME PARTIE
AUTOMATIQUE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

TROISIÈME PARTIE
AUTOMATIQUE DES SYSTÈMES CONTINUS NON LINÉAIRES

QUATRIÈME PARTIE
AUTOMATIQUE DES SYSTÈMES ÉCHANTILLONNÉS

CINQUIÈME PARTIE
REPRÉSENTATION D'ÉTAT DES SYSTÈMES

Avant-propos

L'automatique est la discipline qui, d'une manière générale, traite de la commande des systèmes. Elle revêt donc un caractère très important dans le domaine industriel auquel elle apporte à la fois des solutions, des méthodes d'étude ainsi que des démarches systématiques d'analyse.

Cet ouvrage couvre l'étendue de ces méthodes et correspond globalement aux programmes en vigueur dans la plupart des licences et maîtrises EEA et des écoles d'ingénieurs. Le lecteur y trouvera donc, séparés en plusieurs parties, tous les aspects de l'automatique : systèmes linéaires ou non linéaires, systèmes à temps continu et à temps discret, représentation d'état. Par une approche pédagogique progressive, il intéressera également tous les étudiants qui abordent l'automatique en premier cycle : Licence, IUT, etc.

La présentation de cet ouvrage respecte l'ordre logique dans lequel la discipline est en général abordée et se compose de cinq parties correspondant aux thèmes essentiels couverts par l'automatique.

La première partie est consacrée aux **méthodes de base de la modélisation des systèmes linéaires** continus. Elle contient l'ensemble des notions essentielles à l'étude générale de l'automatique, concepts qui restent valables dans toute la suite de l'étude, y compris pour les systèmes non linéaires ou à temps discret. Il est conseillé au lecteur de n'aborder la suite de l'étude qu'une fois ces notions maîtrisées : transformation de Laplace, spectre, comportement fréquentiel, etc.

L'étude de l'automatique proprement dite, à savoir les **systèmes bouclés**, débute véritablement avec la deuxième partie ; toutes les notions essentielles (mises en équation, stabilité, performances et correction) y sont abordées à propos des systèmes linéaires à temps continu. Ces principes restant valables pour les systèmes non linéaires ou à temps discret, il est recommandé au lecteur de s'assurer que ces bases sont bien acquises avant d'aborder les autres parties de ce livre.

La troisième partie concerne l'étude des **systèmes non linéaires**. Deux chapitres sont consacrés à cette partie de l'automatique qui apparaît souvent comme l'une des plus délicates, compte tenu de l'absence de méthodologie générale applicable à l'ensemble des systèmes non linéaires. Pour cette raison, les systèmes non linéaires sont abordés différemment des systèmes linéaires : les méthodes les plus couramment utilisées sont présentées et détaillées en explicitant les cas pour lesquels elles s'appliquent. Cette présentation n'a pas l'ambition d'être exhaustive mais a pour vocation de sensibiliser le lecteur aux difficultés liées à la mise en œuvre de tels systèmes.

La quatrième partie est consacrée à une branche essentielle de l'automatique : les **systèmes à temps discret**. Toutes les notions présentées (modélisation, stabilité, performances et correction) permettront à l'étudiant d'acquérir la maîtrise d'une discipline qui joue un rôle croissant dans le développement industriel de l'automatique.

La cinquième partie aborde la **représentation d'état des systèmes**, partie beaucoup plus moderne de l'automatique qui permet, grâce à des modélisations différentes de celles abordées jusqu'alors, d'appréhender des systèmes plus complexes et de fournir des méthodes d'études et des réponses scientifiques et technologiques plus précises aux problèmes généraux liés à l'automatique des systèmes réels.

Dans l'ensemble de l'ouvrage, nous avons volontairement choisi de détailler tous les développements théoriques permettant au lecteur d'accéder rapidement à une meilleure compréhension de la discipline. En revanche, certaines parties calculatoires ont été réduites, préférant renvoyer le lecteur à l'utilisation de logiciels de calcul formel dont l'usage est aujourd'hui courant en automatique.

Cette quatrième édition a été enrichie de nouveaux exercices et problèmes permettant au lecteur d'aborder des cas plus sophistiqués et des techniques de résolution innovantes.

Ce livre, qui est un ouvrage de référence dans le domaine de l'automatique, a été conçu avec le souci de la pédagogie. Je formule donc le souhait que tout étudiant en ayant fait l'acquisition puisse y trouver les clés de sa réussite.

À propos de Mathematica

Nous avons fait le choix, d'illustrer un certain nombre d'éléments théoriques avec un logiciel de calcul formel : Mathematica. À l'instar d'autres produits comme Matlab ou Maple, ce logiciel peut être d'une grande utilité puisqu'il permet de s'affranchir d'un certain nombre de calculs fastidieux. Il peut aussi fournir une aide précieuse pour la vérification des résultats obtenus. Néanmoins, cet ouvrage ne constitue en aucune manière un ouvrage de référence sur Mathematica. Notre propos se limite, à cet égard, à montrer comment certains résultats peuvent être obtenus facilement et rapidement. Nous n'utiliserons pas ce logiciel systématiquement et le lecteur qui ne disposerait pas de cet outil ne sera pas pénalisé.

Il nous paraît important de mettre en garde le lecteur qui voudrait utiliser fréquemment Mathematica contre un certain nombre d'erreurs souvent commises ; les quelques conseils qui suivent devraient lui être utiles :

- ne pas chercher à utiliser systématiquement un logiciel de calcul lorsqu'une approche simple est possible ;
- les logiciels comme Mathematica offrent en général des possibilités phénoménales et il n'est pas toujours aisé de s'y retrouver facilement : ne pas hésiter à utiliser l'aide en ligne du logiciel qui regorge d'exemples simples ;
- Mathematica est un logiciel très exigeant en termes de syntaxe. Certaines erreurs sont détectées par le logiciel, d'autres pas. Cela signifie qu'en cas d'erreur de saisie, l'outil peut très bien calculer malgré tout un résultat qui sera pourtant erroné. Il convient par conséquent de rester vigilant et de ne pas hésiter à tester les commandes sur des cas simples pour lesquels on peut facilement vérifier le résultat manuellement.

Y. G.

PREMIÈRE PARTIE

Modélisation des signaux et des systèmes linéaires continus

Chapitre 1

Modélisation des systèmes linéaires Notion de fonction de transfert

1.1 INTRODUCTION

La plupart des systèmes physiques peuvent être décrits comme étant des opérateurs faisant correspondre des réponses R à des sollicitations S (figure 1.1). Ainsi, un système électrique pourra être étudié et caractérisé en exprimant une tension de sortie (réponse) en fonction d'une tension d'entrée (sollicitation). Ou encore, la position d'un amortisseur de véhicule (réponse) pourra être étudiée en fonction de l'excitation produite par les irrégularités de la route. Un faisceau de lumière (sollicitation) dirigé vers une face d'un matériau et qui ressort au travers d'une autre face (réponse) peut par exemple renseigner sur l'état du dit matériau.

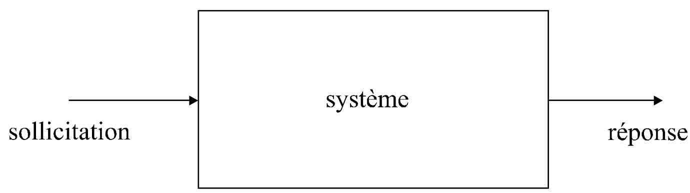

Figure 1.1 Modèle général d'un système.

Les exemples peuvent être multipliés à l'infini, car finalement, cette modélisation peut s'appliquer à la quasi totalité des objets physiques, et ce, que ce soit en électricité, en mécanique, en chimie, en optique, etc. Tout système peut donc s'apparenter au modèle proposé sur le schéma de la figure 1.1.

Dans la réalité, les systèmes peuvent posséder une ou plusieurs entrées, une ou plusieurs sorties, certaines sorties pouvant même éventuellement être considérées comme de nouvelles entrées (cas des systèmes bouclés que nous étudierons dans la partie 2 de cet ouvrage).

Nous étudierons dans ce cours, la manière dont le fonctionnement de tels systèmes peut être décrit, à partir de modèles mathématiques plus ou moins sophistiqués (en tout cas adaptés à la complexité du problème). Ceci nous permettra de répondre à différents types de question, par exemple :

– Quelle sera la réponse d'un système quelconque à telle ou telle sollicitation ? (Aspect prédictif.)
– De quoi se compose un système qui fournit telle réponse à telle sollicitation ? (Aspect caractérisation, identification, mais aussi diagnostic et détection de défauts.)
– Comment adapter ou régler un système pour qu'il fournisse une réponse donnée à une certaine sollicitation ?

D'autres questions se poseront tout au long de cet ouvrage. Il est d'ores et déjà évident qu'une meilleure connaissance de ces systèmes conditionne non seulement leur utilisation, mais également tous les concepts physiques qui y sont associés.

1.2 NOTION DE SIGNAL

Nous pouvons donc avoir une première approche des systèmes en considérant le couple (sollicitation - réponse).

Imaginons un système optique réfléchissant vers lequel on dirige un faisceau de lumière. Le faisceau réfléchi constitue en quelque sorte une information, au sens où il est porteur d'une certaine signification. Nous le qualifierons de *signal*, tout comme le faisceau incident, puisqu'on ne saurait admettre que la réponse d'un système soit porteuse d'information si la sollicitation ne l'était pas.

D'une manière générale, toute sollicitation ou réponse d'un système sera considérée comme un *signal*. Les sollicitations ou excitations sont des signaux d'entrée et les réponses sont des signaux de sortie.

Pour le moment, nous ne considérerons que des systèmes mono-entrée, mono-sortie. Par convention, l'entrée sera notée e et la sortie sera notée s.

1.2.1 Signaux temporels

Le moyen qui *a priori* semble le plus naturel pour décrire un signal consiste à invoquer son évolution au cours du temps. Ainsi les formes $e(t)$ et $s(t)$ sont-elles des représentations temporelles des signaux e et s.

Nous verrons un peu plus tard que ce mode de représentation n'est pas toujours le plus intéressant. Toutefois, dans l'immédiat, nous nous limiterons à cette description temporelle de l'information.

Ainsi, on peut dire qu'un système quelconque est capable de prendre un signal $e(t)$ et de la transformer en un signal $s(t)$.

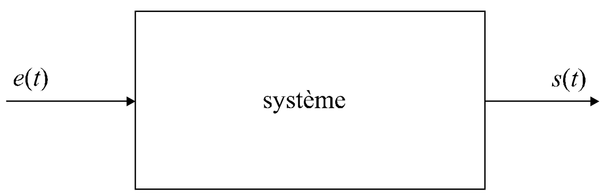

Figure 1.2 Modèle général d'un système.

1.2.2 Principe de causalité

Les signaux temporels possèdent une propriété essentielle sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir à maintes reprises : un effet ne pouvant survenir qu'après la cause qui lui a donné naissance, la réponse temporelle d'un système ne peut en aucun cas précéder la sollicitation qui en est la cause. Il s'agit du principe de causalité qui n'est pas qu'une vérité de Lapalisse comme nous aurons l'occasion de nous en rendre compte.

1.2.3 Signaux non temporels

La théorie des signaux ne traite pas que des signaux temporels. Si par exemple on considère une image en noir et blanc, statique sur un écran, le signal que constitue cette image peut être considéré comme une luminosité dépendant de deux variables spatiales (x, y). Dans ce cas, la variable temps n'a rien à voir avec le problème. D'autres cas pourraient être cités en exemple. Dans ces cas où t n'intervient pas, on peut s'attendre à ce que le principe de causalité ne soit pas respecté.

Il n'est pas question ici d'ébaucher une classification des différents types de signaux. Celle-ci sera abordée plus tard. Nous utiliserons dans la suite de ce chapitre, l'exemple de signaux temporels appliqués à des systèmes simples : les systèmes linéaires.

1.3 LE CAS DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Considérons un système et un signal d'entrée *e(t)* qui est une combinaison linéaire de *n* signaux :

$$e(t) = \lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t) + \cdots + \lambda_n e_n(t)$$

On définira comme système linéaire tout système qui conserve au niveau de sa sortie la combinaison linéaire d'entrée, chaque s_i(t) étant la sortie correspondant à e_i(t).

$$s(t) = \lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t) + \cdots + \lambda_n s_n(t)$$

La plupart du temps, ces systèmes sont régis par des équations différentielles à coefficients constants.

Soit *e(t)* le signal d'entrée, *s(t)* le signal de sortie. L'équation générale d'un système linéaire s'écrit de la manière suivante :

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n s}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} s}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + a_0 s(t) = b_m \frac{\mathrm{d}^m e}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} e}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + be(t)$$

Ces systèmes conservent toutes les opérations linéaires (dérivation, intégration, ...). Le plus grand des deux indices *n* et *m* est appelé ordre du système.

Lorsque le système est effectivement excité par un signal $e(t)$, cette équation différentielle possède effectivement un second membre. Si le système est libre et isolé, le second membre est nul.

> ***Remarque :*** Nous ne nous intéresserons, dans les parties 1 et 2 de ce livre, qu'aux systèmes linéaires et aux signaux temporels continus ; les notions qui suivent ne s'appliquent donc qu'à de tels systèmes, dits linéaires à temps continu.

1.4 LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

1.4.1 Définition

Considérant une fonction réelle d'une variable réelle $s(t)$ telle que $s(t) = 0$ pour $t < 0$, on définit sa transformée de Laplace *L(s)* comme la fonction *S* de la variable complexe *p* telle que :

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

La fonction *S(p)* est une fonction complexe d'une variable complexe *p* (avec $p = \tau + j\omega$).

La transformée de Laplace d'une fonction *s(t)* n'existe pas dans tous les cas : il est nécessaire que l'intégrale ci-dessus converge. On démontre que cette convergence est vérifiée si la partie réelle τ de la variable *p* est supérieure à une valeur donnée α appelée seuil de convergence.

D'une manière plus générale, la transformation de Laplace est une application de l'espace des fonctions du temps (nulles pour $t < 0$) vers l'espace des fonctions complexes d'une variable complexe. La fonction *s(t)* s'appelle l'original de *S(p)*, ou encore sa transformée inverse.

1.4.2 Propriétés fondamentales de la transformation de Laplace

Les propriétés qui suivent sont fondamentales car elles permettent de calculer facilement (sans utiliser la définition de la transformation de Laplace) les transformées de Laplace de certains signaux.

Remarque : Nous verrons plus loin que la connaissance de ces quelques propriétés d'une part et d'une dizaine de transformées de Laplace usuelles, d'autre part, permet de déduire pratiquement n'importe quelle transformée de Laplace.

a) Linéarité

La linéarité de la transformation de Laplace résulte naturellement de la linéarité de l'intégration. Il s'agit là, malgré des apparences de simplicité, d'une des propriétés les plus importantes :

$$L[\alpha f+\beta g]=\alpha L[f]+\beta L[g]$$

En particulier :

$$L[f+g]=L[f]+L[g]$$

et :

$$L[kf]=kL[f]$$

b) Transformée de Laplace d'une dérivée

Soit $f(t)$ une fonction du temps. Soit $F(p)$ sa transformée de Laplace. On montre que la transformée de Laplace de sa dérivée première se calcule simplement en fonction de $F(p)$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \quad\rightarrow\quad pF(p)-f(0)$$

De même, la transformée de Laplace de sa dérivée *n-ième* est :

$$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}t^n} \quad\rightarrow\quad p^nF(p)-\sum_{k=n+1}^{2n}\left(p^{2n-k}\frac{\mathrm{d}^{k-n-1}f}{\mathrm{d}t^{k-n-1}}(0)\right)$$

Par exemple :

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} \quad\rightarrow\quad p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$$

Une première constatation s'impose en observant ces expressions : la transformation de Laplace transforme l'opérateur *dérivation* en un opérateur arithmétique. Il faut noter que l'on retrouve dans ces expressions les conditions initiales, c'est-à-dire les valeurs en $t=0$ des dérivées successives d'ordres inférieurs à l'ordre de dérivation considéré.

Remarque : Dans le cas où ces conditions initiales sont nulles, ce qui est *a priori* très souvent le cas, on peut retenir simplement les relations suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \rightarrow pF(p) \qquad ; \qquad \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}t^n} \rightarrow p^nF(p)$$

c) Transformée de Laplace d'une primitive

Soit $P(t)$ une primitive d'une fonction $f(t)$ et $F(p)$ la transformée de Laplace de cette fonction. On a :

$$P(t)=\int f(t)\,\mathrm{d}t \quad\rightarrow\quad \frac{F(p)}{p}+\frac{P(0)}{p}$$

Là encore, l'opérateur *intégration* se trouve changé en un opérateur arithmétique dans l'espace des transformées de Laplace.

Remarque : Dans le cas où la condition initiale $P(0)$ est nulle, ce qui est *a priori* très souvent le cas, on peut retenir simplement la relation suivante :

$$P(t) = \int f(t)\,\mathrm{d}t \quad \rightarrow \quad \frac{F(p)}{p}$$

d) Propriétés de changement d'échelle

$$f(kt) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right) \qquad ; \qquad f\left(\frac{t}{k}\right) \quad \rightarrow \quad kF(p)$$

Remarque : On veillera à ne pas confondre ces deux propriétés avec la linéarité de la transformation de Laplace.

e) Théorème du retard

Considérons la fonction $f(t - \tau)$, autrement dit la fonction $f(t)$ à laquelle on a fait subir un changement d'origine des temps (figure 1.3), autrement dit un retard d'un temps τ.

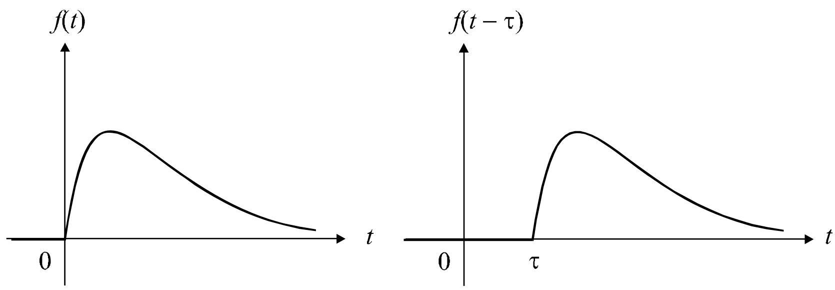

Figure 1.3 Représentation temporelle d'un signal retardé.

Calculons la transformée de Laplace de cette fonction.

On a :
$$f(t) \quad \rightarrow \quad F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

Effectuons dans cette intégrale le changement de variable $u = t + \tau$:

$$F(p) = \int_\tau^{+\infty} f(u - \tau)\,\mathrm{e}^{-p(u-\tau)}\,\mathrm{d}u$$

En remarquant que la fonction $f(u - \tau)$ est nulle pour $t < \tau$, on peut, sans changer la valeur de l'intégrale, lui choisir une borne d'intégration inférieure plus faible que τ :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(u - \tau)\,\mathrm{e}^{-p(u-\tau)}\,\mathrm{d}u$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{p\tau} f(u - \tau)\,\mathrm{e}^{-pu}\,\mathrm{d}u$$

$$F(p) = \mathrm{e}^{p\tau} \int_0^{+\infty} f(u - \tau)\,\mathrm{e}^{-pu}\,\mathrm{d}u$$

Par définition, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(u - \tau)\,\mathrm{e}^{-pu}\,\mathrm{d}u$ est la transformée de Laplace de $f(t - \tau)$.

d'où : $$f(t-\tau) \quad \rightarrow \quad F(p)\,\mathrm{e}^{-p\tau}$$

Cette relation constitue le théorème du retard qui permet de calculer la transformée de Laplace d'une fonction retardée d'un temps τ si l'on connaît la transformée de Laplace de la fonction non retardée.

f) Théorème de la valeur initiale

Considérons la transformée de Laplace $F(p)$ d'une fonction $f(t)$:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

La transformée de Laplace de la dérivée de $f(t)$ est :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \quad \int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = pF(p) - f(0)$$

Lorsque $p \rightarrow +\infty$, on a $\mathrm{e}^{-pt} \rightarrow 0$, donc : $pF(p) - f(0) \quad \rightarrow \quad 0$

Nous retiendrons : $$f(0^+) = \lim_{p \to +\infty} [pF(p)]$$

Ceci constitue le théorème de la valeur initiale qui permet d'obtenir une expression de la valeur de f au voisinage de 0 par valeur supérieure en fonction de sa transformée de Laplace.

g) Théorème de la valeur finale

Encore plus utile que le théorème précédent, le théorème de la valeur finale permet de calculer la limite quand t tend vers l'infini d'une fonction temporelle $f(t)$ en connaissant uniquement sa transformée de Laplace :

$$\lim_{t \to +\infty} [f(t)] = \lim_{p \to 0} [pF(p)]$$

h) Propriétés diverses

Sans être fondamentales, les trois propriétés suivantes peuvent s'avérer utiles lors du calcul de certaines transformées de Laplace :

$$\mathrm{e}^{-at} f(t) \quad \rightarrow \quad F(p+a)$$

$$tf(t) \quad \rightarrow \quad -\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}$$

$$\frac{f(t)}{t} \quad \rightarrow \quad \int_0^{+\infty} F(p)\,\mathrm{d}p$$

1.4.3 Transformée de Laplace inverse

De même qu'une fonction du temps peut avoir une transformée de Laplace, il est possible à partir d'une fonction $F(p)$ de retrouver son original, autrement dit la fonction $f(t)$ dont elle est la transformée de Laplace. Il s'agit ici de calculer une intégrale dans le plan complexe :

Si : $$f(t) \rightarrow F(p)$$

alors : $$f(t) = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)\,\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p$$

L'intégration se fait entre deux bornes complexes dont la partie réelle est une constante c supérieure au seuil de convergence α de $F(p)$.

Remarque : Les cas où il faudra effectivement calculer une transformée de Laplace inverse à l'aide de cette expression sont extrêmement rares : nous verrons plus loin, qu'en général, il suffit de connaître une dizaine de transformées de Laplace usuelles et quelques propriétés fondamentales pour retrouver l'original d'une fonction $F(p)$.

1.5 TRANSFORMÉES DE LAPLACE DE QUELQUES SIGNAUX USUELS

1.5.1 Échelon unité

L'échelon unité (figure 1.4) est la fonction $u(t)$ telle que $u(t) = 0$ pour $t < 0$ et $u(t) = 1$ pour $t \geqslant 0$.

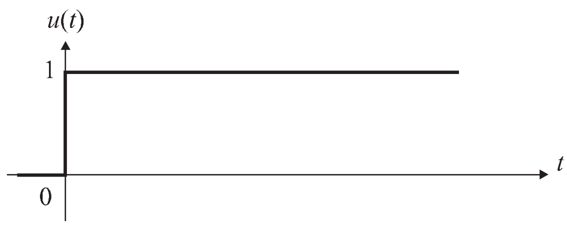

Figure 1.4 Échelon unité.

On a alors : $$u(t) \quad \rightarrow \quad U(p) = \frac{1}{p}$$

Compte tenu de la linéarité de la transformée de Laplace, tout échelon (non unitaire), d'amplitude A, aura pour transformée de Laplace :

$$f(t) = Au(t) \quad \rightarrow \quad F(p) = \frac{A}{p}$$

1.5.2 Rampe ou échelon de vitesse

Il s'agit en réalité de l'intégrale de la fonction $u(t)$ précédente. On la note en général $v(t)$. Elle est nulle pour t négatif et est égale à t pour t positif ou nul (figure 1.5).

On peut écrire : $$v(t) = t \cdot u(t)$$

On a évidemment : $$V(p) = \frac{U(p)}{p} = \frac{1}{p^2}$$

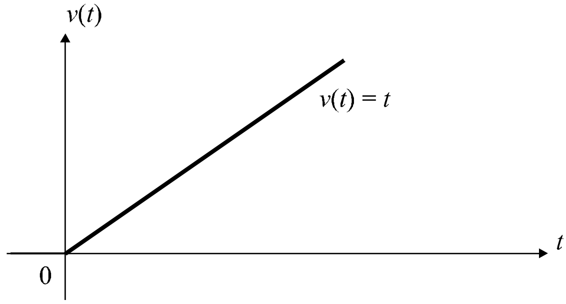

Figure 1.5 Rampe.

Compte tenu de la linéarité de la transformée de Laplace, toute rampe de type $s(t) = kt$ (pour t positif) aura pour transformée de Laplace :

$$s(t) = kt \quad \rightarrow \quad S(p) = \frac{k}{p^2}$$

1.5.3 Impulsion unitaire

En dérivant cette fois la fonction $u(t)$, on obtient une fonction habituellement notée $\delta(t)$ et appelée impulsion unitaire ou impulsion de Dirac.

Il s'agit en théorie d'une fonction nulle pour tout t sauf pour $t = 0$ où elle a une valeur infinie. L'aire comprise entre la courbe représentative de cette fonction $\delta(t)$ et l'axe des t vaut 1. Le schéma de la figure 1.6 donne une idée de cette impulsion en faisant tendre le paramètre θ vers 0.

Figure 1.6 Modèle de l'impulsion de Dirac.

On a alors : $$\delta(t) \quad \rightarrow \quad \Delta(p) = 1$$

1.5.4 Signal sinusoïdal

On considère un signal $s(t)$ nul pour $t < 0$ et valant $s(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ pour $t \geqslant 0$.

On a alors : $$S(p) = \frac{p \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{p^2 + \omega^2}$$

On retiendra essentiellement les deux résultats suivants :

pour $s(t) = \sin \omega t$, $$S(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

et pour $s(t) = \cos \omega t$, $$S(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

1.5.5 Signaux quelconques

Face à un signal quelconque, on peut certes entreprendre le calcul direct de la transformée de Laplace. Ce calcul peut parfois être relativement délicat. On peut aussi se référer à une table de transformées de Laplace telle que celle fournie en annexe A.

Les tables ne contiennent peut-être pas directement la fonction qui nous intéresse, mais les propriétés fondamentales et la linéarité de la transformation permettent la plupart du temps de se ramener à des compositions simples.

Ceci est notamment très utile lorsque l'on cherche l'original d'une fonction *F(p)* et que celle-ci se présente sous la forme d'une fraction rationnelle. Il faudra alors penser à la décomposer en éléments simples qui seront facilement identifiables dans la table.

On peut également utiliser un logiciel de calcul formel pour obtenir directement le résultat. Ainsi, avec Mathematica, on écrit simplement :

$$\text{LaplaceTransform}\left[\mathrm{t} \times \mathrm{e}^{-4t}, \mathrm{t}, \mathrm{p}\right]$$

et on obtient alors immédiatement l'expression $\dfrac{1}{(4+\mathrm{p})^2}$, transformée de Laplace de la fonction te^{-4t}.

1.6 FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME

1.6.1 Définition

Considérons un système linéaire quelconque possédant une entrée *e(t)* et une sortie *s(t)*.

On suppose qu'il est régi par une équation différentielle de degré n :

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n s}{\mathrm{d}t^n} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + a_0 s(t) = b_m \frac{\mathrm{d}^m e}{\mathrm{d}t^m} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + b_0 e(t)$$

Si nous appliquons la transformation de Laplace aux deux membres de cette équation, tout en supposant nulles les différentes conditions initiales (voir §1.4.2 b), il vient :

$$a_n p^n S(p) + \cdots + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + \cdots + b_1 p E(p) + b_0 E(p)$$

soit : $$\left[a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0\right] S(p) = \left[b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0\right] E(p)$$

d'où : $$\frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0} = \frac{S(p)}{E(p)}$$

Cette fraction rationnelle de deux polynômes de la variable complexe p est appelée fonction de transfert du système et communément notée :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

Comme cette fonction est une fraction rationnelle de deux polynômes en p, il est possible de factoriser ces deux polynômes dans le corps des complexes. On obtient :

$$G(p) = \frac{b_m(p - z_m)(p - z_{m-1}) \quad \cdots \quad (p - z_1)}{a_n(p - p_n)(p - p_{n-1}) \quad \cdots \quad (p - p_1)}$$

Les racines z_i qui annulent le numérateur sont appelés les zéros de la fonction de transfert. Les racines p_i qui annulent son dénominateur sont les pôles de la fonction de transfert. Ces paramètres peuvent être complexes ou réels. Nous verrons plus loin que l'étude, le signe ou l'appartenance à l'ensemble des réels de ces pôles ou zéros, jouent des rôles très importants dans l'étude des systèmes.

1.6.2 Mise en cascade de deux systèmes

Sur le schéma de la figure 1.7, nous avons placé deux systèmes en cascade, respectivement de fonction de transfert $G_1(p)$ et $G_2(p)$.

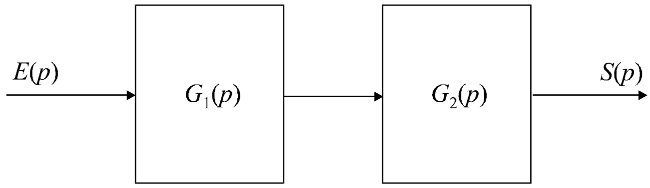

Figure 1.7 Mise en cascade de deux systèmes.

À la condition expresse que la mise en cascade ne perturbe pas le fonctionnement du système situé en amont, la fonction de transfert globale du système composé des deux éléments a pour expression :

$$G(p) = G_1(p)G_2(p)$$

Il convient donc d'être particulièrement vigilant avant d'utiliser cette propriété, notamment pour les systèmes électriques qui, en règle général, sont affectés par la présence d'une charge à leur sortie.

1.6.3 Original d'une fonction de transfert

Bien qu'une fonction de transfert $G(p)$ ne soit pas, à proprement parler, la transformée de Laplace d'un signal, on peut calculer sa transformée inverse $g(t)$ que l'on appelle l'original de la fonction de transfert.

Le principal intérêt de ce concept réside dans le fait que si on injecte une impulsion de Dirac dans un système de fonction de transfert $G(p)$, le signal de sortie $s(t)$ sera égal à $g(t)$.

En effet, si $E(p) = 1$, on a : $\qquad S(p) = G(p)$

La réponse impulsionnelle d'un système est donc l'original de sa fonction de transfert. Cette propriété (bien que dans la réalité il soit impossible de construire une impulsion de Dirac parfaite), joue un rôle important dans l'identification des systèmes.

1.7 RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME À L'AIDE DE LA FONCTION DE TRANSFERT

1.7.1 Principe

La première utilisation intéressante du modèle Laplacien réside dans la résolution systématique de problèmes physiques dans lesquels on possède un système linéaire quelconque régi par une équation différentielle clairement identifiée. On injecte à l'entrée de ce système un signal donné et on souhaite déterminer quel est le signal de sortie.

La connaissance de la fonction de transfert du système (qui s'écrit immédiatement à partir de l'équation différentielle) fournit évidemment la relation entre $S(p)$ et $E(p)$ c'est-à-dire entre les transformées de Laplace respectives de la sortie et de l'entrée du système :

$$S(p) = G(p)E(p)$$

Il suffit donc de calculer ou de déterminer à partir des tables, la transformée de Laplace de *e(t)*, puis d'effectuer le calcul de *S(p)* puis, enfin, toujours à partir des tables, de déterminer l'original de *S(p)*.

Remarque : Un rapide coup d'œil sur la table de transformées de Laplace fournie en annexe A nous montre que la plupart des transformées des signaux usuels se présentent sous la forme d'une fraction rationnelle simple de polynômes de la variable p. La fonction de transfert se présentant toujours sous la forme d'une fraction rationnelle, il est clair qu'il en sera de même pour la transformée de Laplace du signal de sortie, qui ne sera rien d'autre que le produit de deux fractions rationnelles. En décomposant la fraction rationnelle $S(p)$ en éléments simples que l'on retrouvera facilement dans la table et en utilisant la propriété de linéarité de la transformation, on calculera aisément l'expression de la sortie $s(t)$.

1.7.2 Exemples

a) Système du second ordre excité par un échelon unitaire

Considérons un système régi par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + 4\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + 3s(t) = 2e(t)$$

On injecte dans ce système un signal d'entrée $e(t)$ correspondant à un échelon. Soit $e(t) = u(t)$. On cherche à identifier l'expression du signal de sortie $s(t)$.

Le calcul de la fonction de transfert ne pose aucun problème ; on applique la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle :

$$p^2 S(p) + 4pS(p) + 3S(p) = 2E(p)$$

$$S(p)\left[p^2 + 4p + 3\right] = 2E(p)$$

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2}{p^2 + 4p + 3}$$

Remarque : Avec un peu d'habitude, l'écriture de la fonction de transfert deviendra immédiate et ne nécessitera plus l'application stricte de la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle. En effet, les coefficients de l'équation différentielle se retrouvent dans le même ordre dans les deux polynômes de la fraction rationnelle $G(p)$.

Nous savons par ailleurs que $E(p) = \dfrac{1}{p}$ (échelon unitaire).

On en déduit donc :

$$S(p) = \frac{2}{p\left(p^2 + 4p + 3\right)}$$

➤ Résolution classique manuelle

En remarquant que $S(p) = \dfrac{2}{p\left(p^2 + 4p + 3\right)} = \dfrac{2}{p\,(p+3)\,(p+1)}$, on peut envisager la décomposition de $S(p)$ en éléments simples :

$$S(p) = \frac{2}{p\,(p+3)\,(p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{p+1}$$

$$S(p) = \frac{A\,(p+3)\,(p+1) + Bp\,(p+1) + Cp\,(p+3)}{p\,(p+3)\,(p+1)}$$

$$S(p) = \frac{(A+B+C)\;p^2 + (4A+B+3C)\,p + 3A}{p\,(p+3)\,(p+1)}$$

Identifions : $$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 4A+B+3C=0 \\ 3A=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{2}{3} \\ B=\dfrac{1}{3} \\ C=-1 \end{cases}$$

d'où : $$S(p)=\frac{2}{3p}+\frac{1}{3(p+3)}-\frac{1}{p+1}=S_1(p)+S_2(p)+S_3(p)$$

Compte tenu de la linéarité de la transformation de Laplace, on aura évidemment : $s(t)=s_1(t)+s_2(t)+s_3(t)$, chaque $s_i(t)$ étant l'original de $S_i(p)$.

La table de transformées de Laplace nous donne, sans calcul :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3p} &\rightarrow \frac{2}{3}u(t) \\ \frac{1}{3(p+3)} &\rightarrow \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3t}\,u(t) \\ -\frac{1}{p+1} &\rightarrow -\,\mathrm{e}^{-t}\,u(t) \end{aligned}$$

Au final : $$s(t)=\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3t}-\mathrm{e}^{-t}\right]\cdot u(t)$$

➤ Résolution avec Mathematica

Avec un logiciel de calcul formel, la détermination de $s(t)$ est immédiate. Avec Mathematica, par exemple, on écrira la commande :

$$\text{InverseLaplaceTransform}\left[2/(\text{p}(\text{p}^2+4\text{p}+3))\right]$$

qui nous affiche immédiatement le résultat : $\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}e^{-3t}-e^{-t}$

Remarque : Les expressions temporelles fournies par les tables ne sont valables que pour $t>0$; ces fonctions sont nulles pour $t<0$. La présence de $u(t)$ dans ces expressions suffit à nous le rappeler. Parfois, par abus d'écriture, on peut omettre $u(t)$ à condition de ne pas perdre de vue que l'expression n'est valable que pour $t>0$ et que toutes les fonctions que nous utilisons sont nulles pour $t<0$. Il faut noter que le logiciel Mathematica ne mentionne pas la présence de $u(t)$.

b) Étude de la réponse d'un circuit RC à une entrée en rampe

Considérons le circuit RC présenté sur la figure 1.8. Le signal d'entrée injecté est $e(t)=3t$ et la sortie correspond à $s(t)$ dont on cherche l'expression.

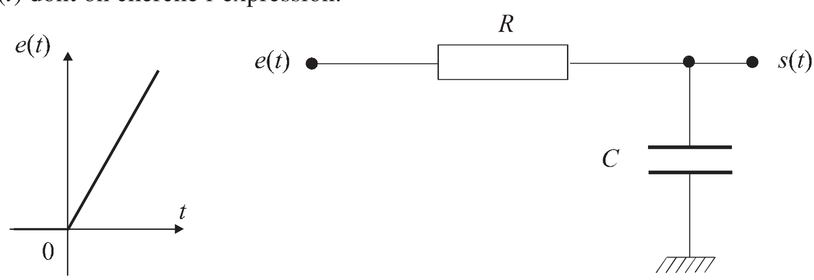

Figure 1.8 Circuit RC.

Considérons le courant $i(t)$ qui circule à la fois dans R et dans le condensateur C.